INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

# Vývoj číselných soustav

**Ladislava Francová**

**Centrum talentů M&F&I, Univerzita Hradec Králové, 2010**

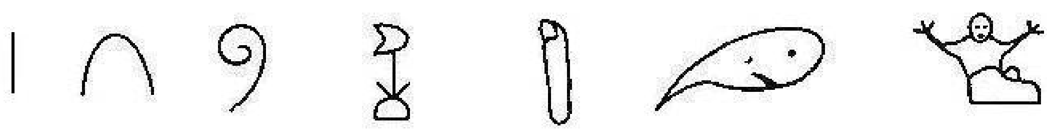
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ
Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

# VÝVOJ ČÍSELNÝCH SOUSTAV

Tento text si klade za cíl popsat, jaké číselné soustavy a číselné symboly se během historického vývoje užívaly k vyjádření přirozených čísel a zlomků, v některých případech se bude zabývat také historickými algoritmy pro provádění početních operací sčítání, odčítání, násobení a dělení.

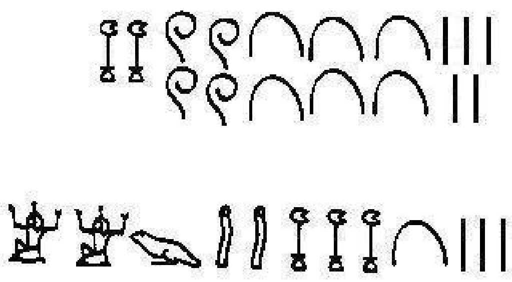
## 1. STARÝ EGYPT

Od nejstarších dob Egypťané užívali nepoziční desítkovou soustavu. Nejstarší záznamy čísel se v Egyptě objevily kolem roku 3000 př. n. l. V hieroglyfickém písmu existovaly hieroglyfické znaky pro číslo 1 a pro mocniny čísla 10 až do $10^6$. Jejich podobu vidíme na obr. 1. [1] První ze symbolů na tomto obrázku znamenal číslo 1 a patrně představoval měřicí hůl. Druhý symbol znamenal číslo 10 a představoval kraví pouta na nohy nebo ruku. Třetí znak vyjadřoval číslo 100 a představoval stočený měřicí provazec k vyměřování polí nebo svinutý palmový list. Čtvrtý znak vyjadřoval číslo 1 000 a představoval květ lotosu, který kvetl na březích Nilu a byl symbolem hojnosti. Pátý znak vyjadřoval číslo 10 000 a byl obrazem ukazováku. Šestý symbol znamenal číslo 100 000 a byl obrazem pulce, kterých se po záplavách na Nilu objevovalo velké množství. Poslední znak vyjadřoval číslo 1 000 000 a byl obrazem některého z bohů. Podle některých pramenů existoval ještě hieroglyf pro číslo $10^7$.



Obrázek 1: Egyptské hieroglyfické znaky pro čísla

Jednotlivá přirozená čísla se pak zapisovala opakováním těchto znaků, jak vidíme na obr. 2. [2]



Obrázek 2: Zápis čísel 2 465 a 2 123 013 v hieroglyfickém písmu

[1] převzato z [3], str. 39
[2] převzato z [3], str. 40

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ
Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Se vznikem hieratického a později démotického písma se změnila i podoba číselných znaků.

Sčítání dvou či více přirozených čísel zapsaných v desítkové soustavě nečinilo problémy. Stačilo sečíst jednotky stejného řádu (vyjádřené stejnými znaky) a deset jednotek jednoho řádu nahradit jednou jednotkou vyššího řádu.

Při odčítání se obdobně od sebe odčítaly jednotky stejného řádu, přičemž někdy bylo nutné nahradit jednu jednotku vyššího řádu deseti jednotkami nižšího řádu. Vždy se jednalo o odčítání menšího čísla od většího. Záporná čísla a číslo nula Egypťané neznali. Vzhledem k tomu, že užívali nepoziční číselnou soustavu, nepotřebovali nulu ani k vyjádření prázdného řádu.

Při násobení Egypťané užívali zdvojnásobování a sčítání. Jejich metodu násobení předvedeme na příkladu $13 \cdot 19 = 247$. Činitele 19 budeme postupně zdvojnásobovat, jak ukazuje následující tabulka:

| | | |
|---|---|---|
| / | 1 | 19 |
| | 2 | 38 |
| / | 4 | 76 |
| / | 8 | 152 |

dohromady 247

Poslední číslo v levém sloupci tabulky nesmí převýšit druhého činitele 13. V tomto sloupci tabulky označíme ta čísla, jejichž součet je 13, to je čísla 1, 4 a 8. Potom sečteme jim odpovídající čísla v pravém sloupci, čímž dostaneme výsledek 247.

Stejným způsobem se provádělo také dělení. Postup předvedeme na příkladu $247 : 13 = 19$. Dělitele 13 budeme zdvojnásobovat, jak vidíme v tabulce:

| | | |
|---|---|---|
| / | 1 | 13 |
| / | 2 | 26 |
| | 4 | 52 |
| | 8 | 104 |
| / | 16 | 208 |

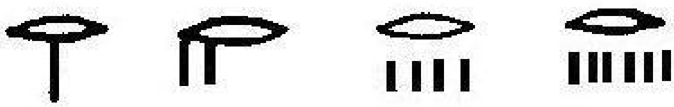
dohromady 247

Poslední číslo v pravém sloupci tabulky nesmí převýšit dělence 247. V tomto sloupci označíme ta čísla, jejichž součet je 247, to je čísla 208, 26 a 13. Potom sečteme jim odpovídající čísla v levém sloupci, čímž dostaneme výsledek 19. Ovšem při tomto postupu lze dělitele vyjádřit jako součet čísel v pravém sloupci jen v případě, kdy se jedná o dělení beze zbytku.

Kromě přirozených čísel Egypťané znali také kladné zlomky. Používali pouze kmenné zlomky, tj. zlomky s čitatelem 1, a zlomek $\frac{2}{3}$. Zlomky $\frac{1}{2}$ a $\frac{2}{3}$ měly zvláštní symbol, ostatní kmenné zlomky se zapisovaly tak, že nad číslem, které představovalo jmenovatele kmenného zlomku, se v hieroglyfickém písmu zakreslil znak úst, někdy nazývaný hieroglyf „ra“. Na obr. 3 [3] jsou hieroglyfické zápisy zlomků $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{6}$. V hieratickém písmu se místo znaku úst začala psát pouze tečka.

Ostatní kladné zlomky se zapisovaly jako součty přirozeného čísla, kmenných zlomků s různými jmenovateli a zlomku $\frac{2}{3}$. Vyjádření daného kladného zlomku tímto způsobem může být v některých případech

[3] převzato z [3], str. 43



Obrázek 3: Zlomky v hieroglyfickém písmu

poměrně náročným počtářským úkolem. Pro usnadnění takových úkolů měli Egypťané vypracovány tabulky rozkladů zlomků $\frac{2}{n}$ pro $n$ liché od 5 do 101 na součet dvou nebo více kmenných zlomků s různými jmenovateli. Tyto rozklady často odpovídaly vzorci

$$\frac{2}{n} = \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n(n+1)}.$$

Například

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15},$$
$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}.$$

Některé rozklady byly mnohem náročnější, například

$$\frac{2}{83} = \frac{1}{60} + \frac{1}{332} + \frac{1}{415} + \frac{1}{498},$$
$$\frac{2}{89} = \frac{1}{60} + \frac{1}{356} + \frac{1}{534} + \frac{1}{890},$$
$$\frac{2}{97} = \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776},$$
$$\frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}.$$

Daný zlomek $\frac{2}{n}$ lze na součet kmenných zlomků rozložit mnoha různými způsoby, ale všechny dochované egyptské texty uvádějí stejné rozklady. Je otázkou, jak Egypťané tyto rozklady objevili.

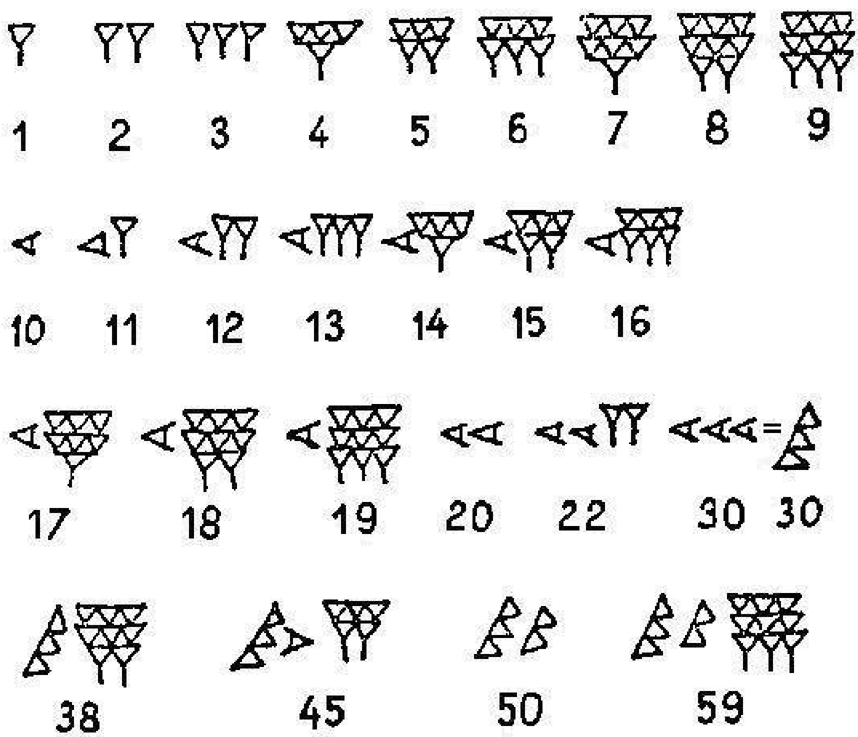
## 2. STARÁ MEZOPOTÁMIE

Sumerové a později Babylóňané, tj. národy žijící ve starověké Mezopotámii, používali klínové písmo, klíny vyrývali rákosovým rydlem do vlhkých hliněných tabulek, které posléze vypalovali na slunci či v pecích. Klínové písmo užívali i k záznamu čísel. Přibližně v polovině třetího tisíciletí př. n. l. začali místo staršího způsobu zápisu čísel užívat zápis čísel v poziční šedesátkové soustavě. Během několika dalších století se ustálil zápis čísel pomocí jen dvou znaků, které vidíme na obr. 4. První klín označoval číslo 1, druhý číslo 10.

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ
Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Obrázek 4: Znaky pro čísla v klínovém písmu

Opakováním těchto dvou klínů se zapsala přirozená čísla do 59, některé zápisy vidíme na obr. 5. [4]




Obrázek 5: Zápis čísel v klínovém písmu

Vzhledem k tomu, že se jednalo o poziční soustavu o základu 60, znamenal první klín z obr. 4 také čísla $60, 60^2, 60^3, \ldots$. Řády se zapisovaly do řádků zleva doprava od nejvyšších řádů k nejnižším. Na obr. 6 [5] je uveden zápis čísel $147 = 2 \cdot 60 + 27$ a $424000 = 1 \cdot 60^3 + 57 \cdot 60^2 + 46 \cdot 60 + 40$.

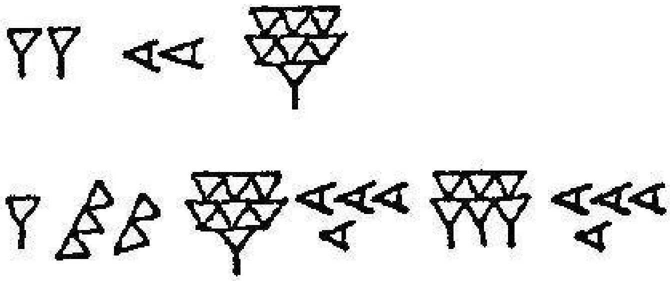
V Mezopotámii používali šedesátinné zlomky, které se zapisovaly stejným způsobem jako čísla přirozená. První klín z obrázku 4 tudíž označoval také čísla $\frac{1}{60}, \frac{1}{60^2}, \ldots$. Šedesátinné zlomky tedy byly zapsány formálně stejně jako čísla přirozená.

[4] převzato z [3], str. 213
[5] převzato z [3], str. 214

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.



Obrázek 6: Zápis čísel 147 a 424 000 v klínovém písmu

Nedostatkem tohoto zápisu čísel byl problém s rozlišováním jednotlivých řádů. Dlouho totiž chyběl znak pro prázdný řád. Například zápis na obr. 7 pravděpodobně vyjadřoval číslo $1 \cdot 60 + 11 = 71$, ale také mohl vyjadřovat čísla $1 \cdot 60^2 + 11 \cdot 60 = 4260$, $1 \cdot 60^2 + 11 = 3611$, $1 + \frac{1}{60}$, $\frac{1}{60} + \frac{1}{60^2}$ a další.

Obrázek 7:

Teprve kolem poloviny prvního tisíciletí př. n. l. byl zaveden znak pro prázdný řád, který ale nebyl užíván na konci čísla. Dnešní přepis mezopotámských čísel užívá konvence, kdy jsou jednotlivé řády od sebe odděleny čárkou a celá část čísla je od šedesátinných zlomků oddělena středníkem. Například zápis (1, 2, 3; 4, 5) označuje číslo $1 \cdot 60^2 + 2 \cdot 60 + 3 + \frac{4}{60} + \frac{5}{60^2}$. Užívání poziční soustavy je velkým úspěchem mezopotámské matematiky.

Početní operace sčítání a odčítání nečinily problémy, jediný problém mohl nastat s rozlišováním řádů. Řád bylo někdy nutné určit z kontextu. Odčítalo se vždy menší číslo od většího, záporná čísla nebyla známa.

Na rozdíl od Egypťanů násobili v Mezopotámii přímo podle řádů. „Malá násobilka“, jejíž znalost je pro násobení nutná, v šedesátkové soustavě obsahuje součiny od $1 \times 1$ do $59 \times 59$, to je 1 770 součinů. Tyto součiny si nemohl počtář pamatovat, proto se mezopotámské algoritmy pro násobení opíraly o používání tabulek násobení, které obsahovaly část jejich „malé násobilky“. Dělení někdy prováděli přímo, často však dělení převáděli na násobení převrácenou hodnotou dělitele, přičemž k nalezení převrácené hodnoty byly používány tabulky.

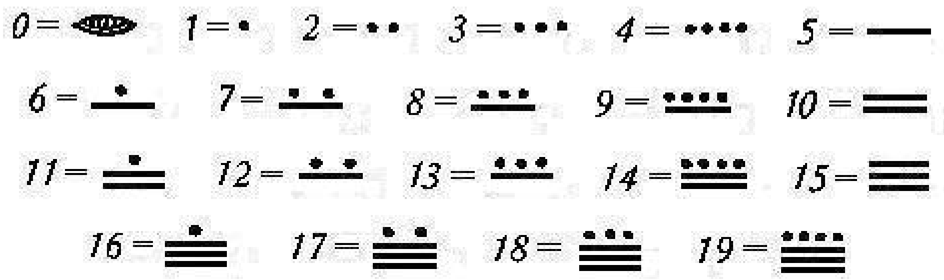
## 3. MAYOVÉ

Již ve 4. století př. n. l. Mayové užívali poziční číselnou soustavu o základu 20 s pozůstatky dřívější pětkové soustavy a se znakem pro nulu. K zápisu čísel používali buď hieroglyfy nebo kombinace teček a vodorovných čárek. Matematika, astronomie a kalendářní výpočty užívaly druhý způsob záznamu čísel, kde nula byla vyjádřena schematickým obrazem mušle. Symboly pro čísla 0 až 19 jsou uvedeny na na obr. 8: [6]

[6] převzato z [6], str. 65

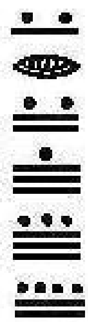
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.




Obrázek 8: Mayské symboly pro čísla

Při zápisu větších přirozených čísel se řády psaly pod sebe, přičemž nejnižší řád byl zapsán dole. Například zápis na obr. 9 vyjadřoval číslo $7 \cdot 20^5 + 0 \cdot 20^4 + 12 \cdot 20^3 + 16 \cdot 20^2 + 18 \cdot 20 + 14 = 22\ 502\ 774$.



Obrázek 9: Zápis čísla 22 502 774 mayskou symbolikou

Nevíme, jak Mayové prováděli početní operace. Rovněž se nedochovaly informace o tom, jaké symboly užívali pro zlomky.

## 4. STARÉ ŘECKO

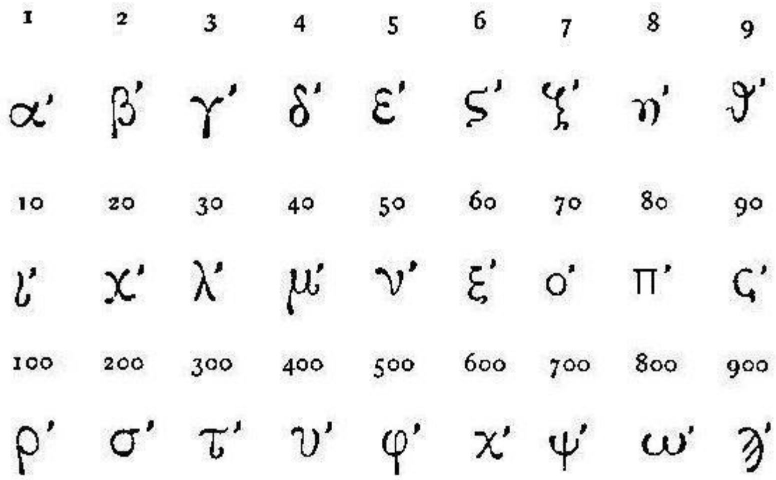
Ve starém Řecku se užívala nepoziční desítková soustava. V 10. století př. n. l. se začala užívat tzv. *herodiánská číselná symbolika*, která měla dvě varianty - atickou a bojótskou podle krajů Řecka. Na obr. 10 vidíme v prvním řádku symboly pro čísla 1 (prst), 5 aticky (obraz dlaně s pěti prsty), 5 bojótsky, 10 aticky, 10 bojótsky, 100, 1 000 a 10 000. Spojením těchto znaků vznikly symboly pro čísla 50, 500 a 5 000 uvedené ve druhém řádku. Ostatní přirozená čísla se zapsala opakováním těchto znaků. Ve třetím řádku je zapsáno číslo 9 821.

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ
Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Obrázek 10: Herodiánské číselné symboly

Tento způsob zápisu čísel se v Řecku objevoval ještě v 1. století př. n. l. V té době se už několik století zároveň používala další číselná symbolika, a to tzv. *jónský způsob* zápisu čísel. V tomto zápise jsou přirozená čísla označována malými písmeny řecké abecedy, k nimž připisovali pruh nebo čárku, aby je odlišili od písmen. Zde 24 písmen malé řecké abecedy a tři zastaralé znaky označovaly čísla $1, 2, \ldots, 9$, $10, 20, \ldots, 90$, $100, 200, \ldots, 900$, jak můžeme vidět na obr. 11. [7]




Obrázek 11: Jónské číselné symboly

Tímto způsobem Řekové pomocí 27 znaků zapsali všechna přirozená čísla do 999, přičemž každé z těchto čísel bylo zapsáno nejvýše třemi znaky. Například číslo 834 se zapsalo takto: $\omega'\lambda'\delta'$. Tisíce se zapisovaly jako jednotky s čárkou před písmenem, například 5 000 bylo zapsáno takto: $,\varepsilon$. Vidíme, že jónská číselná symbolika umožnila stručnější zápis čísel. Záporná čísla a nulu jako číslo Řekové neznali.

[7] převzato z [6], str. 79

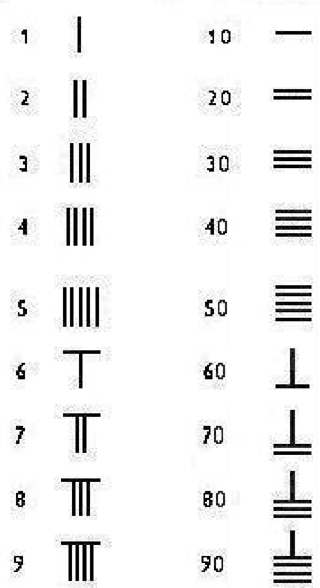
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ
Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Vedle přirozených čísel Řekové užívali kladné zlomky. Používali kmenné zlomky, které dlouho zapisovali slovně, teprve později je zapisovali symboly, například $\frac{1}{4} = \delta''$ nebo $\overline{\delta}'$ apod. Zápis obecných zlomků nebyl jednotný, nejdokonalejší byl způsob, kde se jmenovatel psal nad čitatele (samozřejmě ještě bez zlomkové čáry).

Početní operace Řekové prováděli na početní desce, která se nazývala abak či abacus. Na takové desce byly svislé čáry, jež oddělovaly jednotlivé řády. Řády šly zprava doleva, od nižších k vyšším. Čísla se na desce vyjadřovala položením kamének nebo speciálních početních známek do sloupců mezi čarami. Manipulací s kaménky potom počítali. Při počítání na abaku obvykle zapisovali jen konečný výsledek. Pouze při složitějších výpočtech zaznamenávali i mezivýsledky. Pro ulehčení počítání také používali různé tabulky. Násobení někdy prováděli egyptskou metodou.

## 5. ČÍNSKÁ MATEMATIKA

Nejstarší čínské zápisy čísel se objevují na magických kostkách ze 14. až 11. století př. n. l. a na keramických a bronzových předmětech a mincích z 10. až 3. století př. n. l. Od 4. století př. n. l. a možná i dříve Číňané používali k vyjádření čísel tyčinky. Používání tyčinek se udrželo až do 13. století n. l. V tomto způsobu zápisu čísel užívali 18 číselných znaků pro čísla 1 až 9 a pro desítky od 10 do 90. Obě skupiny znaků jsou si velmi podobné, liší se jen uspořádáním tyčinek. Vidíme je na obr. 12.




Obrázek 12: Čínské znaky pro čísla

Počítání s těmito číslicemi mělo poziční charakter. Symboly pro jednotky označovaly také stovky, desítky tisíc atd., symboly pro desítky označovaly také tisíce, stovky tisíc atd. Čísla se psala do řádku. Na obr. 13 vidíme zapsané číslo 6 728.

Obrázek 13: Zápis čísla 6 728

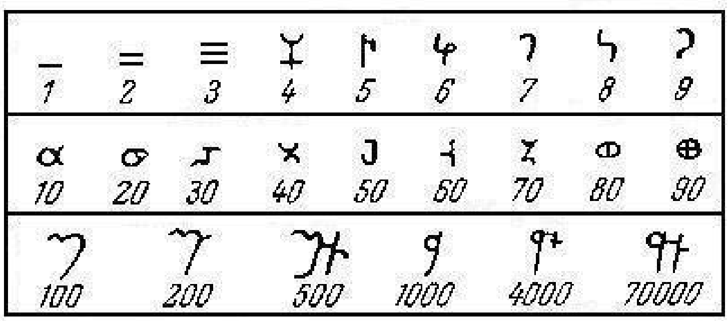
Jedná se tudíž o nejstarší desítkovou poziční soustavu, která ovšem zpočátku nebyla důsledně poziční, chyběl totiž symbol pro nulu. Při počítání na početní desce příliš nevadilo, že symbol pro nulu neexistoval, protože odpovídající místo na desce zůstalo prázdné. Symbol pro nulu se do Číny později dostal z Indie, kde se v podobě tečky poprvé objevil v 8. století n. l. V tištěných čínských matematických spisech se symbol nuly ve tvaru kroužku poprvé objevil ve 13. století.

Výpočty se v Číně prováděly na početní desce pomocí tyčinek. Početní operace sčítání, odčítání a násobení se prováděly nejprve s číslicemi nejvyššího řádu a postupně se přecházelo k nižším řádům. To vyžadovalo časté opravování mezivýsledků. Později se při výpočtech začal používat tzv. *suan-phan*, který do jisté míry připomíná naše dětské počítadlo.

Od nejstarších dob se v Číně používaly obecné zlomky. Zvláštní symboly pro zlomky neexistovaly a zlomek $\frac{m}{n}$ se zapisoval slovně jako „$m$ $n$-tých dílů“. Pro nejčastěji používané zlomky byly vytvořeny zvláštní názvy a znaky. Početní operace se zlomky se také prováděly na početní desce. Patrně poprvé v historii se v Číně začaly používat desetinné zlomky. To souviselo s desetinným dělením měr a vah.

## 6. INDICKÁ MATEMATIKA

Od nejstarších dob se v Indii používala desítková soustava. Objevily se různé ciferné záznamy. Zřejmě nejrozšířenější z nich byly číslice *bráhmí*, které se bez podstatných změn užívaly déle než tisíc let. V číslicích bráhmí existovaly zvláštní znaky pro jednotky, desítky, sta a tisíce. Jejich podobu vidíme na obr. 14. [8]




Obrázek 14: Číslice bráhmí

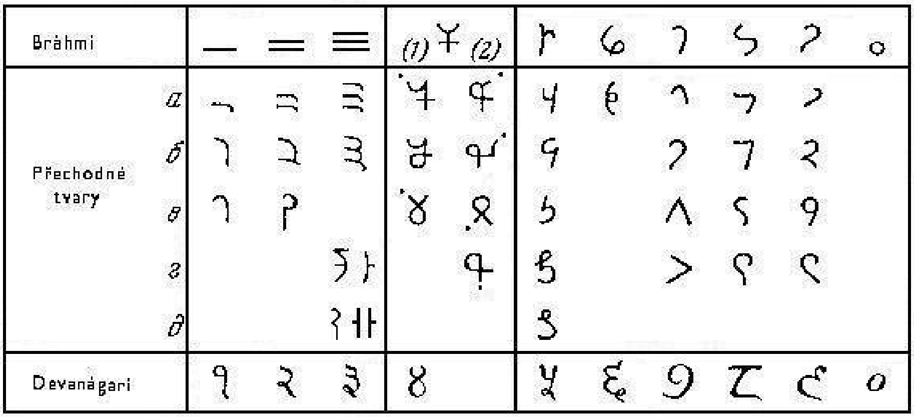
[8] převzato z [5], str. 110

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Existence speciálních symbolů pro čísla od 1 do 9 je důležitý rys indické matematiky, který byl předpokladem pro vytvoření desítkové poziční soustavy. Vytvoření poziční desítkové soustavy je velice významným vědeckým i kulturním úspěchem národů Indie. Teprve tato soustava umožnila provádění početních operací v písemné podobě tak jednoduše, že mohly konkurovat počítání na početní desce. Proces vzniku této soustavy byl dlouhý a není zcela objasněn. Patrně se zde užívala od 6. století n. l. V 7. století již určitě existovala a zprávy o ní se začaly šířit na západ. Koncem 8. století byla známa v Bagdádu a arabští matematici ji rychle přijali. Nulu vyjadřovali Indové zpočátku tečkou, ta byla posléze vytlačena všeobecným používáním kroužku jako symbolu nuly. Termín *šúnja*, tj. „prázdné“, který pro nulu užívali Indové v sanskrtu, přeložili Arabové jako *as-syfr* a z toho pochází naše slovo cifra. Nelze přesně zjistit, zda nula byla v Indii objevena či zda ji Indové převzali od jiných národů. Tvar symbolů pro čísla 1 až 9 se v Indii měnil od místa k místu a také postupem času. Z mnoha zápisů se nejvíce používaly číslice písma *devanágarí*, které je v Indii základním písmem dodnes. Je pravděpodobné, že vznikly postupnou úpravou číslic bráhmí. Vývoj indických číslic vidíme na obr. 15. [9]




Obrázek 15: Vývoj indických číslic

Početní operace se zprvu prováděly na početní desce pomocí mušliček kauri. Později se začaly provádět na početních deskách pokrytých prachem nebo pískem, do kterého se číslice kreslily zaostřenou hůlkou. Početní operace se většinou prováděly od cifer nejvyššího řádu, proto byly nutné zpětné opravy mezivýsledků, které se prováděly tak, že se nepotřebné cifry v písku zamazaly a místo nich se nakreslily nové. Vzhledem k tomu nebylo možné zkontrolovat celý postup výpočtu. To byl zřejmě důvod pro užívání tzv. devítkové zkoušky, kterou používaly ke kontrole správnosti výsledků operací násobení, dělení, umocňování a odmocňování. Je založena na tom, že zbytky po dělení daného přirozeného čísla a jeho ciferného součtu devíti jsou stejné. Jestliže nazveme zkouškou zbytek po dělení ciferného součtu daného čísla devíti, potom např. při násobení dvou čísel se zkouška jejich součinu musí rovnat součinu zkoušek obou činitelů. Obdobná věta platí i pro ostatní operace. Musíme ovšem poznamenat, že rovnost zkoušek je jen nutnou, ale ne postačující podmínkou správnosti výsledku operace. O tom se indičtí matematici nezmiňovali. To bylo asi způsobeno tím, že možnost selhání devítkové zkoušky je velmi málo pravděpodobná. Devítkovou zkoušku používali také arabští matematici a později se rozšířila i do Evropy.

[9] převzato z [5], str. 113

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ
Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Pro počítání v poziční soustavě je nutné znát výsledek početních operací s nulou. Indičtí matematici patrně jako první formulovali pravidla pro počítání s nulou. Slovně uvedli a zdůvodnili následující pravidla:

$$a \pm 0 = a,$$

$$0 + a = a,$$

$$a - a = 0,$$

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0,$$

$$0 : a = 0.$$

Dělení čísla různého od nuly nulou považovali zpočátku za nemožné, později došli k závěru, že dělení nulou dává nekonečno.

Indové používali obecné zlomky typu $\frac{m}{n}$ a počítání se zlomky podrobně rozpracovali. Jejich zápis zlomků se téměř shodoval s dnešní formou zápisu zlomků, čitatele psali nad jmenovatele, ale ještě nepoužívali zlomkovou čáru. Smíšená čísla zapisovali tak, že celou část čísla psali nad čitatele zlomkové části.

Za velice významný musíme považovat přínos Indů pro počítání se zápornými čísly. Záporná čísla se používala už kolem počátku našeho letopočtu v Číně při řešení soustav lineárních rovnic. Je tudíž možné, že Indové první poznatky o záporných číslech přijali z Číny, ale žádné doklady o tom neexistují. Jisté je, že Indové poznatky o záporných číslech hlouběji rozpracovali a poznali jejich nové důležité vlastnosti. Nevíme, kdy se záporná čísla v Indii poprvé objevila. První známá zmínka o záporných číslech se vyskytuje ve spisech indického matematika Bráhmagupty, který žil v 7. století n. l. Kladná čísla Indové nazývali majetek, záporná čísla nazývali snížení či dluh. Záporná čísla označovali tečkou nad číslicí. Bráhmagupta formuloval pravidla pro sčítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování dvěma a odmocňování dvěma se zápornými čísly. Pravidla pro umocňování a odmocňování záporných čísel byla potom dále rozpracována. Bháskara II. ve 12. století uvedl, že druhá odmocnina z kladného čísla je jak kladná, tak záporná. Mahávíra v 9. století říkal, že druhá odmocnina ze záporného čísla neexistuje.

Zručně počítali Indové také s druhými odmocninami. Bráhmagupta ukazoval, jak se rozšiřováním zbavit druhých odmocnin ve jmenovateli zlomků. Bháskara II. pak uvedl další důležité identity pro počítání s kvadratickými iracionalitami.

## 7. ARABSKÁ MATEMATIKA

Číselné hodnoty se v arabských textech nejprve vyjadřovaly slovy nebo řeckou alfabetickou symbolikou. Slovní zápis se udržel vedle pozičního číselného zápisu i v dalších stoletích. Řecký alfabetický zápis čísel ve 12. století vymizel. V 8. století se objevila arabská numerace podobná řecké, která se opírala o arabskou abecedu a do 10. století se dosti rozšířila. Již v první polovině 10. století se začíná šířit indická poziční desítková soustava.

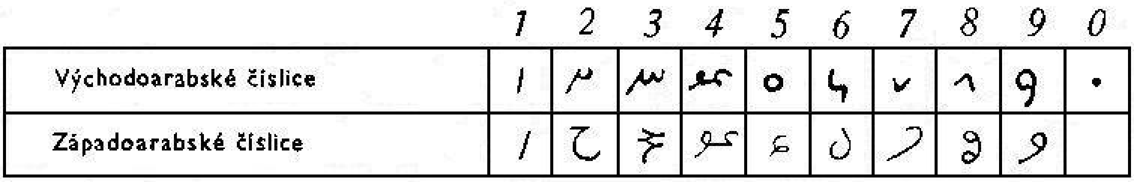
Aritmetický traktát, jehož autorem byl arabský matematik al-Chwárizmí, je první známou arabskou prací, v níž je vyložena indická desítková poziční soustava. Al-Chwárizmí žil na přelomu 8. a 9. století a pracoval v čele matematiků v „Domě moudrosti“ v Bagdádu. Jeho aritmetický traktát se dochoval jen v latinském překladu z 12. století a jediný známý rukopis tohoto traktátu pochází až z poloviny 13. století a není to přesný překlad původního arabského originálu. Tento rukopis je uložen v knihovně univerzity

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ
Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

v Cambridge. Al-Chwárizmí zde nejprve podrobně vysvětluje způsob zápisu přirozených čísel v desítkové poziční soustavě pomocí indických znaků a dává návod k vyslovování velkých čísel. Potom následuje podrobný popis početních operací podle indického vzoru. Sčítání a odčítání doporučuje provádět zleva doprava, tj. počínaje nejvyššími řády.

Po odčítání se mluví o půlení a zdvojnásobování. Tyto dvě operace se jako zvláštní operace u al-Chwárizmího objevují poprvé a od něj přešly do celé středověké arabské a evropské literatury. I al-Chwárizmí sám věděl, že zdvojnásobování je jen zvláštní případ násobení a půlení zvláštní případ dělení. Potom následuje výklad násobení, autor naznačuje i multiplikační vlastnosti nuly, tj. $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$. Násobení doporučuje provádět na desce pokryté prachem a začínat od cifer nejvyššího řádu. Rovněž dělení se doporučuje provádět na desce pokryté prachem, aby bylo usnadněno smazávání mezivýsledků. Spis končí výkladem operací se zlomky. Autor užívá hlavně šedesátinné zlomky, které se v arabských zemích užívaly i v následujících staletích.

Od 10. století zápis čísel v poziční desítkové soustavě užíval východoarabské číslice, které lze považovat za určitou modifikaci číslic bráhmí. Ve stejné době se na Pyrenejském poloostrově objevily západoarabské číslice částečně shodné s východoarabskými. Západoarabské číslice se nazývaly *džubar* (někdy psáno *gubar*), toto slovo znamená v arabštině písek či prach a naznačuje, že se tyto číslice psaly na desce posypané pískem. Podobu těchto číslic uvádí obr. 16.[10]




Obrázek 16: Arabské číslice

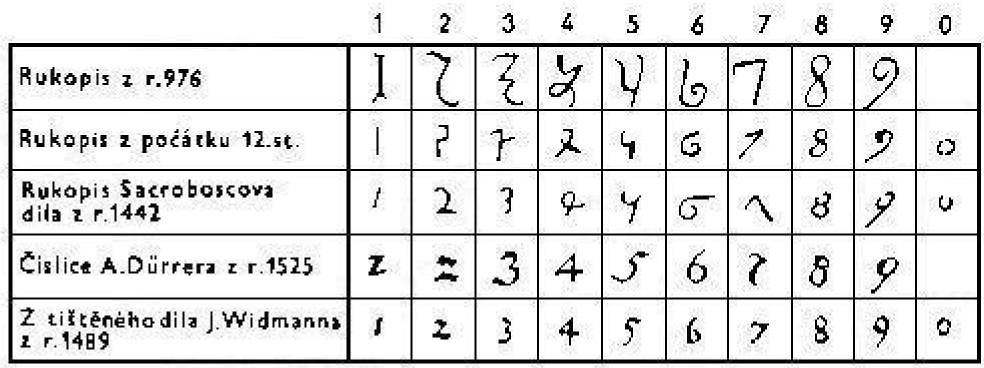
Východoarabské číslice se dodnes udržely v řadě zemí, například v Egyptě, Sýrii, Turecku a Íránu. Západoarabské číslice se dodnes užívají v Maroku.

## 8. STŘEDOVĚKÁ EVROPA

Ve středověké Evropě se až do 10. století používaly výhradně římské číslice, římské zlomky a počítalo se na abaku. V pracích o počítání na abaku se čísla vyjadřovala slovy nebo římskými číslicemi. Abakus tvořila obvykle hladká deska posypaná pískem a rozdělená na několik sloupců, které odpovídaly jednotlivým řádům. Do sloupců se kladly nebo zakreslovaly symboly jednotek odpovídajících řádů. Na rozdíl od starověkých početních desek se jednotky nevyjadřovaly pomocí několika kaménků či neoznačených početních známek, ale pomocí zvláštních početních známek s vyobrazením příslušných číslic. Tyto obrazy i vlastní početní známky se nazývaly *apices*, což je množné číslo slova *apex*. Slovo apex znamená latinsky kromě jiného také způsob psaní. Záměna kaménků za apices nebyla pro přehlednost počítání příliš výhodná a později se počtáři vrátili zpět k neoznačeným početním známkám. Apices byly důležité v tom, že v nich vidíme předchůdce moderních evropských číslic.

[10] převzato z [5], str. 194

Indo-arabské číslice začaly pronikat do Evropy nejpozději v 10. století přes Španělsko právě ve formě apices. Číslice džubar se do maurského Španělska dostaly díky obchodu s Orientem a byly používány při kupeckých výpočtech na početní desce. Nejprve se používaly bez symbolu pro nulu. V písemných zápisech se nad číslovkami dělaly tečky, jejichž počet odpovídal řádu. Desítky měly jednu tečku, stovky dvě tečky atd. Později se objevila nula ve tvaru kroužku. Nejstarší dochovaný evropský rukopis, který obsahuje arabské číslice, je *Codex Vigilanus*, pochází z roku 976 a byl nalezen v klášteře v severním Španělsku. Tento rukopis ještě neobsahoval symbol pro nulu. Nové číslice se potom vyskytují v různých rukopisech z 11. století a dalších století, přičemž jejich tvar se nadále měnil a rozdíly v jejich tvaru mezi jednotlivými rukopisy byly dost podstatné. Představu o změně tvaru našich číslic nám dává obr. 17.[11]




Obrázek 17: Vývoj tvaru arabských číslic v Evropě

Už víme, že slovo cifra vzniklo z arabského slova *as-syfr*, které označovalo nulu. Stejný význam mělo zpočátku i slovo cifra. Teprve později se pro nulu prosadilo slovo *cephirum* (z něj vzniklo italské *zero*), které užil Leonardo Pisánský, a slovo cifra dostalo dnešní význam. Slovo *nullus*, tj. žádný, se v hovorové řeči matematiků rozšířilo koncem 15. století.

Velký význam pro šíření desítkové poziční soustavy a nových číslic v Evropě mělo od 12. století seznámení se s latinskými překlady arabských matematických spisů o aritmetice. Nejdůležitější z nich byl al-Chwárizmího aritmetický traktát. Znalost nové numerace se poměrně rychle šířila. V polovině 12. století již byla známá v Německu a Rakousku. Kromě Španělska byla nejdůležitějším centrem šíření nové aritmetiky Itálie. Zde vznikl roku 1202 vynikající spis *Kniha o abaku* (*Liber abaci*), jehož autorem byl Leonardo Pisánský. Je to velice podrobné dílo o aritmetice a algebře opírající se o desítkovou poziční soustavu. Leonardo ve spise mimo jiné podrobně vykládá počítání s novými čísly.

Latinizovaná podoba jména al-Chwárizmího nejčastěji byla *algorithmus* nebo *algorismus* a toto slovo se stalo názvem nové aritmetiky. Termín algorismus používá i Leonardo Pisánský. Ve stejné době se začíná používat slovo *algoritmikové* pro zastánce algoristické aritmetiky na rozdíl od *abacistů*, jak se nazývali zastánci počítání na abaku. Později se termín algoritmus začal používat pro libovolný pravidelný početní postup k řešení určité skupiny úloh.

Počet prací o algorismu potom výrazně vzrostl a začaly vznikat i práce v národních jazycích. I přes tyto úspěchy se nový způsob zápisu čísel prosazoval proti římským číslicím se značnými obtížemi. Zpočátku nový

[11]převzato z [5], str. 343

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ
Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

způsob užívali jen odborníci a do širších kruhů obyvatelstva pronikal velmi pomalu. Chyběl totiž jednotný způsob zápisu nových číselných symbolů, který by omezoval padělání v zápisech, to po dlouhou dobu bylo překážkou uznání nových číslic. Například ještě v roce 1299 měli kupci ve Florencii zakázáno používat v účetnictví nové číslice a bylo doporučeno psát čísla slovy. Ovšem výhody nového zápisu byly natolik velké, že do 16. století se nové početní způsoby prosadily nejen mezi učenci, ale i ve školách a v každodenním životě. Tomu pomohlo také širší používání a zlevnění papíru, který se začal v Evropě vyrábět ve 12. století. Pak se mohly výpočty místo na abaku provádět písemně na papíru. Ohromný význam pro definitivní prosazení nové aritmetiky i pro šíření matematických znalostí měl knihtisk.

Spolu s desítkovou poziční soustavou pro celá čísla se do Evropy z arabských zemí přenesly také šedesátinné zlomky, které se používaly hlavně při astronomických výpočtech. Používání systému šedesátinných zlomků bylo jedním z předpokladů pro zavedení desetinných zlomků v Evropě. K desetinným zlomkům dospěl poprvé ve svých trigonometrických tabulkách, vydaných v roce 1579, Francois Viéte (1540–1603), který psal někdy pouze čitatele desetinných zlomků. Zásluhu o první systematické zavedení desetinných zlomků měl holandský inženýr Simon Stevin (1548–1620), který ve vlámštině vydal v roce 1585 spisek s názvem *Desetina* a popsal v něm, jak zapisovat desetinná čísla a jak s nimi počítat. Vedle toho se používaly zlomky obecné. Zlomková čára se při zápisu zlomků v Evropě poprvé objevila v roce 1202 u Leonarda Pisánského. Přibližně ve stejné době se zlomková čára objevila i v arabské matematice.

## 9. STŘEDOVĚKÉ POČETNÍ ALGORITMY

Jednou z možností bylo ve středověku počítání na prstech, které bylo používáno už ve starověku. Užívalo se k jednoduchému znázornění čísel a ke sčítání a odčítání. K násobení a dělení se prsty příliš nehodily. Další možností, o které již bylo zmíněno, bylo počítání na abaku, na kterém byly svislé čáry, které vymezovaly sloupce pro jednotlivé řády. Koncem 12. století se v Evropě objevily místo svislých čar vodorovné čáry, tzv. *liny* a začalo se používat *počítání na linách.* Rovnoběžné čáry se nakreslily na tabuli, stůl nebo na papír. Každá čára byla určena pro jeden řád. Kaménky se kladly na čáry nebo mezi ně, na čáře měly kaménky hodnotu jednotky příslušného řádu, v mezeře měly hodnotu pěti jednotek spodní čáry. Místo kaménků se někdy malovaly puntíky, které bylo při výpočtu možno snadno mazat. Počítání na linách se pak provádělo podobnými postupy jako počítání na abaku. Abakus a liny se běžně používaly až do 15. století.

Se šířením desítkové poziční soustavy se začaly početní operace provádět písemně a postupně se zdokonalovaly metody pro jejich provádění. Mluvilo se o *počítání na cifry.* Teprve koncem 15. století písemné postupy počítání z velké části vytlačily počítání na linách. Při počítání se postupovalo zleva doprava, tj. od cifer nejvyššího řádu. To způsobovalo, že během výpočtu bylo nutné opravovat částečné výsledky, protože výpočet v nižších řádových jednotkách ovlivnil výsledek ve vyšších jednotkách. Tyto postupy většinou měly svůj původ v Indii, kde se prováděly na deskách pokrytých prachem nebo pískem, což umožňovalo snadné vymazávání mezivýsledků a jejich postupné nahrazování dalšími mezivýsledky. V Evropě se tyto početní postupy začaly provádět na papíru, takže soustavné vymazávání mezivýsledků nebylo tak snadné. Proto bylo vymazávání mezivýsledků nahrazeno přeškrtáváním nepotřebných číslic a nadepisováním opravených číslic. Výsledek výpočtu byl obvykle sestaven z nejvýše napsaných nepřeškrtnutých číslic.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

**Sčítání**

Počtář zapisoval sčítance pod sebe, výsledek se obvykle nadepisoval nad sčítance. Postup si ukážeme na příkladu $3478 + 5673 + 9784 = 18935$. Začínáme sčítat od jednotek nejvyššího řádu.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 8 & 9 & 3 & \\
1 & \cancel{7} & \cancel{7} & \cancel{2} & 5 \\
 & 3 & 4 & 7 & 8 \\
 & 5 & 6 & 7 & 3 \\
 & 9 & 7 & 8 & 4
\end{array}
$$

Výsledek 18 935 čteme ve dvou řádcích, je sestaven z nejvýše napsaných nepřeškrtnutých číslic. Tento způsob sčítání se v učebnicích udržel až do 16. století, někde i déle.

**Odčítání**

Odčítání se ve středověku provádělo několika způsoby. První způsob pocházel z Indie a je podobný předchozímu způsobu sčítání. Menšenec a menšitel se napíší pod sebe, odčítá se zleva doprava, výsledek se nadepisuje, nepotřebné částečné výsledky se škrtají. Výsledek se sestaví z nejvýše napsaných nepřeškrtnutých číslic, které jsou ve dvou i více řádcích. Postup ukážeme na příkladu $6534 - 4789 = 1745$.

$$
\begin{array}{cccc}
1 & 7 & 4 & \\
\cancel{2} & \cancel{8} & \cancel{5} & 5 \\
6 & 5 & 3 & 4 \\
4 & 7 & 8 & 9
\end{array}
$$

Druhou možností je odčítání pomocí desítkového doplňku. Tento způsob se vyvinul v Evropě. Desítkovým doplňkem čísel $1, 2, \ldots, 9$ jsou čísla $9 = 10 - 1, 8 = 10 - 2, \ldots, 1 = 10 - 9$. Počtář zapsal na první řádek menšence, na druhý řádek menšitele a na třetí řádek zaznamenal rozdíl. Výpočet se zde prováděl zprava doleva. Pokud v menšenci byla větší cifra než pod ní stojící cifra menšitele nebo byly obě cifry stejné, pak se odečetlo jako při dnes běžném způsobu odčítání. Pokud však v menšenci byla menší cifra než pod ní stojící cifra menšitele a odčítání nebylo možno takto provést, tak se cifra menšitele nahradila jejím desítkovým doplňkem, který se přičetl k cifře menšence a k další cifře menšitele se přičetla jednička. Tento postup je založen na identitě

$$a - b = a + (10 - b) - 10.$$

Postup předvedeme na příkladu $73627 - 56248 = 17379$. Výsledný zápis bude vypadat takto:

$$
\begin{array}{ccccc}
7 & 3 & 6 & 2 & 7 \\
5 & 6 & 2 & 4 & 8 \\
1 & 7 & 3 & 7 & 9
\end{array}
$$

Postup výpočtu je následující: rozdíl $7 - 8$ „nelze provést“, proto stanovíme desítkový doplněk čísla 8, tj. 2, a sečteme $7 + 2 = 9$, na místo jednotek rozdílu zapíšeme 9. Zvětšíme o 1 další cifru menšitele, tj. $4 + 1 = 5$, rozdíl $2 - 5$ „nelze určit“, stanovíme tedy desítkový doplněk čísla 5, tj. 5, a sečteme $2 + 5 = 7$, 7 zapíšeme na místo desítek rozdílu. Zvětšíme o 1 další číslici menšitele, tj. $2 + 1 = 3$, rozdíl $6 - 3 = 3$ „lze provést“, zapíšeme 3 jako další číslici rozdílu. Rozdíl $3 - 6$ „nelze vypočítat“, určíme desítkový doplněk čísla 6, tj. 4, a sečteme $3 + 4 = 7$, 7 zapíšeme do rozdílu. Přičteme jedničku k další číslici menšitele, tj. $5 + 1 = 6$, rozdíl $7 - 6 = 1$, cifru 1 zapíšeme jako první cifru rozdílu.

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ
Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

**Násobení**

Vývoj algoritmů pro provádění násobení je pestřejší. Většina užívaných algoritmů má svůj původ v Indii. Všechny algoritmy násobení předpokládají znalost malé násobilky, tj. znalost součinů od $1 \cdot 1$ do $9 \cdot 9$. Znát celou malou násobilku zpaměti bylo pro středověké počtáře příliš náročné, proto rozvinuli metody, jak vystačit se znalostí jen části malé násobilky od $1 \cdot 1$ do $5 \cdot 5$ a jak pomocí těchto součinů určit součiny $a \cdot b$ pro $5 < a < 10$, $5 < b < 10$. Chceme-li stanovit součin takových dvou čísel $a, b$, tak určíme jejich desítkové doplňky $10 - a$ a $10 - b$ a vynásobíme je. Součin $(10 - a) \cdot (10 - b)$ tvoří jednotky hledaného součinu $a \cdot b$. Číslo $a + b - 10$ pak vyjadřuje počet desítek součinu $a \cdot b$. Tento postup je založen na identitě:

$$a \cdot b = 10(a + b - 10) + (10 - a) \cdot (10 - b).$$

Chceme-li tímto způsobem určit součin $7 \cdot 8$, určíme desítkové doplňky čísel 7 a 8, to jsou čísla 3 a 2, tyto doplňky vynásobíme, $3 \cdot 2 = 6$, tím jsme dostali jednotky součinu. Čísla 7 a 8 sečteme a od součtu odečteme 10, tj. $7 + 8 - 10 = 5$, tím jsme dostali desítky hledaného součinu $7 \cdot 8 = 56$.

Na stejném principu je založeno určování součinů $a \cdot b$ pro $5 < a < 10$, $5 < b < 10$ na prstech obou rukou. Tento způsob násobení se někdy nazývá *cikánská násobilka*. Máme-li určit tímto způsobem součin čísel 7 a 8, pak na jedné ruce vztyčíme 2 prsty a na druhé ruce vztyčíme 3 prsty. Obecně vztyčíme tolik prstů, o kolik je každý z činitelů větší než číslo 5. Součet vztyčených prstů udává počet desítek součinu, součin nevztyčených prstů (to jsou desítkové dopňky obou činitelů) tvoří jednotky součinu.

Jedním z ve středověku užívaných algoritmů pro násobení víceciferných čísel byl postup nazývaný *galea*, tj. loď, nebo *batello*, tj. člun. Tento algoritmus násobení pocházel z Indie. Začínal se provádět od cifer nejvyššího řádu a vzhledem k tomu bylo nutné stále opravovat částečné výsledky. To bylo snadné na indických poprášených deskách, ale když se v Evropě začaly výpočty provádět na papíru, tak se vymazávání nahradilo škrtáním částečných výsledků a nadepisováním dalších částečných výsledků. Výsledný zápis pak někomu připomínal obrys lodě se stěžni a plachtami, odkud tento algoritmus dostal svůj název.

Ukážeme si tento postup na příkladu $246 \cdot 387 = 95202$. Nejprve zapíšeme oba činitele pod sebe tak, aby první cifra výše napsaného činitele stála nad poslední cifrou níže napsaného činitele. To je takto:

$$\begin{array}{ccccc} & & 3 & 8 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & & \end{array}$$

Potom první cifrou horního činitele, tj. cifrou 3, postupně vynásobíme všechny cifry spodního činitele 246. Násobení provádíme zleva doprava, částečné výsledky píšeme nad násobené číslice spodního činitele a musíme postupně opravovat částečné výsledky jako u sčítání. Po provedení tohoto kroku bude zápis vypadat takto:

$$\begin{array}{ccccc} 7 & 3 & 8 & & \\ \cancel{6} & \cancel{2} & 3 & 8 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & & \end{array}$$

Potom znovu zapíšeme cifry spodního činitele 246, ale posuneme je o jedno místo vpravo, takže je činitel 246 zapsán ve dvou řádcích. Nyní posunuté cifry činitele 246 násobíme druhou cifrou činitele 387, tj. cifrou 8. Násobíme opět zleva a výsledky přičítáme k předchozímu částečnému výsledku, to opět vyžaduje opravy

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ
Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

částečných výsledků. Po tomto druhém kroku bude zápis vypadat následovně:

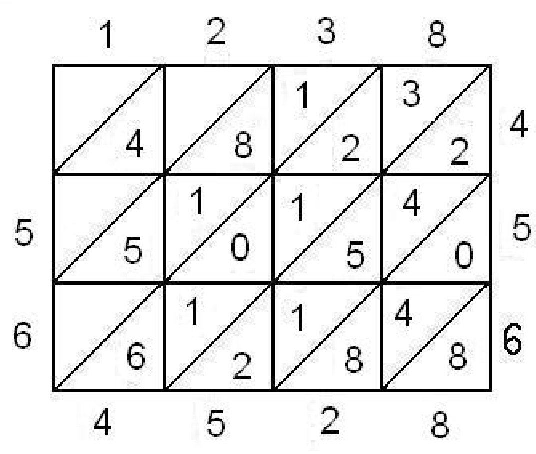
$$\begin{array}{ccccc}
9 & 3 & 4 & & \\
\cancel{8} & \cancel{9} & \cancel{0} & & \\
\cancel{7} & \cancel{3} & \cancel{8} & 8 & \\
\cancel{6} & \cancel{2} & 3 & 8 & 7 \\
2 & 4 & 6 & 6 & \\
 & 2 & 4 & &
\end{array}$$

Ve třetím kroku znovu zapíšeme číslice činitele 246 posunuté o další místo doprava, takže činitel 246 bude zapsán ve třech řádcích. Posunuté cifry činitele 246 násobíme třetí cifrou činitele 387, tj. cifrou 7. Násobíme zleva a výsledky přičítáme k předchozímu částečnému výsledku a provádíme opravy. Po tomto kroku dostaneme výsledný zápis v této podobě:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 2 & & \\
 & 5 & \cancel{1} & & \\
 & \cancel{4} & \cancel{8} & & \\
9 & \cancel{3} & \cancel{4} & 0 & \\
\cancel{8} & \cancel{9} & \cancel{0} & \cancel{6} & \\
\cancel{7} & \cancel{3} & \cancel{8} & \cancel{8} & 2 \\
\cancel{6} & \cancel{2} & 3 & 8 & 7 \\
2 & 4 & 6 & 6 & 6 \\
 & 2 & 4 & 4 & \\
 & & 2 & &
\end{array}$$

Středověký počtář měl na svém papíru pouze poslední zápis. Výsledek tvoří nejvýše zapsané nepřeškrtnuté číslice.

Další středověký algoritmus pro násobení víceciferných čísel se obvykle nazývá *gelosia* a rovněž pochází z Indie. Na obr. 18 je tento algoritmus předveden na příkladu $1238 \cdot 456 = 564528$.




Obrázek 18: Násobení metodou gelosia

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ
Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Počtář nejprve zakreslil čtvercovou síť a každý čtverec sítě rozdělil úhlopříčkou na dva trojúhelníky. Číslice jednoho činitele se zapíší nad sloupce čtverců sítě, číslice druhého činitele se zapíší vpravo za řady čtverců sítě. Pak se určí součiny jednotlivých cifer obou činitelů a zapíší se do příslušných čtverců sítě, desítky do levého horního trojúhelníku, jednotky do pravého dolního trojúhelníku. Potom počtář sčítal čísla v jednotlivých šikmých pásech ve směru úhlopříček od pravého dolního trojúhelníku až k levému hornímu trojúhelníku, případné desítky přičetl k součtu v následujícím pásu a výsledky zapsal pod čtvercovou síť a po její levé straně.

### Dělení

Nejrozšířenějším středověkým algoritmem pro dělení víceciferných čísel byl postup nazývaný stejně jako algoritmus pro násobení *galea* nebo *battello*. Tento algoritmus opět pochází z Indie, kde se prováděl na deskách poprášených prachem. Předvedeme ho na příkladu 239567 : 384 = 623, zbytek 335. Nejprve se zapíše dělitel pod dělence tak, aby byly pod sebou jejich cifry nejvyššího řádu v případě, že dělitel je menší nebo roven číslu utvořenému ze stejného počtu cifer dělence. V opačném případě se první cifra dělitele zapsala pod druhou cifru dělence. V našem případě bude úvodní zápis vypadat takto:

$$\begin{array}{cccccc}
2 & 3 & 9 & 5 & 6 & 7 \\
 & 3 & 8 & 4 & & 
\end{array}$$

Nyní se provede odhad první cifry podílu, tj. odhad podílu 2395 : 384, odhad nebo-li částečný podíl je 6, tento částečný podíl se zapíše za svislou čáru vpravo od dělence. Částečným podílem 6 se násobí jednotlivé cifry dělitele a výsledky se odčítají od dělence. To se provádí zleva doprava, takže se musí škrtat a opravovat částečné výsledky, použité číslice dělence a dělitele se škrtají také. Po tomto kroku vypadá zápis výpočtu takto:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & \cancel{1} & 9 & & & & & \\
 & \cancel{5} & \cancel{1} & 1 & & & & \\
\cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{9} & \cancel{5} & 6 & 7 & | & 6 \\
 & \cancel{3} & \cancel{8} & \cancel{4} & & & & 
\end{array}$$

Nyní nejvýše zapsané nepřeškrtnuté cifry 91 tvoří částečný zbytek. Počtář znovu zapíše všechny cifry dělitele 384, ale posune je o jedno místo doprava, dělitel tedy bude zapsán ve dvou řádcích. Provede odhad další cifry podílu, tj. odhad 916 : 384, tento odhad je 2, což se zapíše do podílu za svislou čarou za cifru 6. Částečným podílem 2 se opět násobí jednotlivé cifry dělitele a výsledky se odčítají od dělence. To se provádí zleva doprava, takže se musí škrtat a opravovat částečné výsledky, použité číslice dělence a dělitele se škrtají také. Po tomto kroku vypadá zápis výpočtu takto:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & & & & & \\
 & & \cancel{3} & 4 & & & & & \\
 & \cancel{1} & \cancel{9} & \cancel{5} & & & & & \\
 & \cancel{5} & \cancel{1} & \cancel{1} & 8 & & & & \\
\cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{9} & \cancel{5} & \cancel{6} & 7 & | & 6 & 2 \\
 & \cancel{3} & \cancel{8} & \cancel{4} & \cancel{4} & & & & \\
 & & \cancel{3} & \cancel{8} & & & & & 
\end{array}$$

Nyní opět posuneme dělitele 384 o jedno místo doprava, takže bude zapsán ve třech řádcích. Provedeme odhad podílu 1487 : 384, tj. 3. Částečným podílem 3 stejně jako v předchozím kroku násobíme dělitele a

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

odčítáme od dělence. Výsledný zápis dělení bude následující:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & 3 & & & & & & \\
 & & \cancel{1} & \cancel{5} & & & & & & \\
 & & \cancel{3} & \cancel{4} & 3 & & & & & \\
 & \cancel{1} & \cancel{9} & \cancel{5} & \cancel{4} & & & & & \\
 & \cancel{5} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{8} & 5 & & & & \\
\cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{9} & \cancel{5} & \cancel{6} & \cancel{7} & | & 6 & 2 & 3 \\
 & \cancel{3} & \cancel{8} & \cancel{4} & \cancel{4} & \cancel{4} & & & & \\
 & & \cancel{3} & \cancel{8} & \cancel{8} & & & & & \\
 & & & \cancel{3} & & & & & &
\end{array}
$$

Podíl je tedy 623, zbytek 335 je tvořen nejvýše zapsanými nepřeškrtnutými číslicemi.

**Použitá a doporučená literatura:**

[1] Balada, F.: *Z dějin elementární matematiky*, SPN Praha 1959.

[2] Bečvář, J. a kol.: *Matematika ve středověké Evropě*, edice Dějiny matematiky, 19. svazek, Prometheus, Praha 2001.

[3] Bečvář, J., Bečvářová, M., Vymazalová, H.: *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie*, edice Dějiny matematiky, 23. svazek, Prometheus, Praha 2003.

[4] Jelínek, M.: *Numerační soustavy*, SPN Praha 1974.

[5] Juškevič, A. P.: *Dějiny matematiky ve středověku*, Academia, Praha 1978.

[6] Kolman, A.: *Dějiny matematiky ve starověku*, Academia, Praha 1969.