ÚLOHY Z MECHANIKY III
Zákony zachování

Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

Jan Prachař

Obsah

Úvod

V knihovičce Fyzikální olympiády vychází v pořadí již třetí díl volné série textů Úlohy z mechaniky. V tomto textu se budeme zabývat zákony zachování a jejich využitím při řešení fyzikálních úloh. Čtenář by měl mít základní znalosti mechaniky, které může nastudovat v učebnicích [1], [2] či [3]. Některé fyzikální poučky v textu jenom velice stručně zopakujeme, ale výklad bude založen především na řešení vybraných příkladů.

Při čtení tohoto textu mějte neustále při sobě papír a tužku. Výklad je bohatě proložen příklady s jejich řešením. Před přečtením řešení se však chvíli zamyslete a zkuste si napsat pár poznámek o tom, jak byste příklad sami řešili. Každou algebraickou úpravu si také sami ověřte. Důrazně čtenářům doporučujeme, aby nalistovali konec brožurky a pokusili se řešit navržené úlohy. Tím si nejen ověříte, že myšlenky z textu chápete, ale rovněž v nich získáte větší jistotu a déle si je budete pamatovat.

1 Zákony zachování

1.1 Co je to zákon zachování

Nastíníme na velice názorném příkladu, co to znamená zákon zachování. Začneme poučným příběhem.

Malá Anežka je na prázdninách u své babičky na venkově. Hned od příjezdu ji zaujala babiččina krásná porcelánová dóza, kterou však nesměla na babiččin příkaz otvírat, aby ji nerozbila. Protože je Anežka zvídavá a chytrá holčička, rozhodla se, že alespoň částečně dózu prozkoumá, přestože nemůže znát celé její tajemství.

Anežka prováděla každý den vážení celé dózy i s jejím neznámým obsahem. Naměřené hodnoty pečlivě vynášela do grafu. Několik prvních dní se jí zdálo, že hmotnost dózy je konstantní, jenže čtvrtý den její hmotnost klesla o 20 g. To se opakovalo později několikrát. Pak si Anežka všimla, že hmotnost dózy klesne vždy v ten den, kdy přijede k babičce na návštěvu její sestra. Anežka si do zápisníčku napsala

$$\text{hmotnost dózy} + \text{počet návštěv babiččiny sestry} \times 20\,\mathrm{g} = \text{konst}\,.$$

S tímto „zákonem dózy“ byla Anežka spokojená až do dne, kdy hmotnost dózy vzrostla o 1 kg. S touto záhadou si Anežka dlouho hlavu nelámala, ten den totiž jeli všichni spolu s dědečkem do města na nákup. Anežka tedy učinila předpoklad, že platí

$$\begin{aligned}\text{hmotnost dózy} + \text{počet návštěv babiččiny sestry} \times 20\,\mathrm{g} - {}&\\ - \text{počet nákupů ve městě} \times 1\,\mathrm{kg} = \text{konst}\,.&\end{aligned}$$

Tento její zákon platil přesně až do konce prázdnin. Když babička zjistila, jak důmyslně Anežka odvodila zákon dózy, uvolila se a ukázala Anežce, že v porcelánové dóze uchovává kostkový cukr. Pokaždé, když přijela její sestra na návštěvu, daly si obě dvě kostky cukru do kávy. Tehdy, když jeli s dědečkem nakupovat, uložili do dózy nové balení kostkového cukru. Anežka měla velkou radost z toho, že už ví, co je v dóze, a byla hrdá na to, že našla správný zákon pro hmotnost cukru v dóze.

Viděli jsme, že Anežka dokázala najít veličinu, která zůstává konstantní, s žádnou informací o obsahu dózy. Anežka tak může činit předpovědi o hmotnosti dózy, aniž by ji musela vážit. O přesně stejném principu budeme uvažovat v tomto textu. Klasická fyzika umožňuje přesně předpovídat jakýkoliv budoucí stav systému, ale potřebuje k tomu úplnou informaci o současném systému (v mechanice polohu a rychlost každého bodu). Stejně jako Anežka však umíme najít veličiny obsahující řadu abstraktních členů, které zůstávají při vývoji systému konstantní. Můžeme tedy předpovídat některé vlastnosti, aniž bychom současný stav systému museli kompletně popsat. Takovýmto zákonům budeme říkat zákony zachování a budeme se jimi zabývat konkrétněji dále v textu.

Pokud by k Anežčině babičce přijela na návštěvu babiččina drahá přítelkyně, která by se nechala pohostit kávou s cukrem, hmotnost dózy by se změnila v nesouladu s Anežčiným zákonem. Anežka během prázdnin návštěvu drahé přítelkyně nezažila a nemohla ji proto zahrnout do svého zákona. Stejně tak fyzikové, když se v historii setkali s nějakým novým jevem, museli vždy do zákonů zachování přidávat nové členy. Ty jsou abstraktní v tom smyslu, že neznáme příčinu, proč vypadají právě takhle, ale všechny experimenty svědčí o tom, že tak vypadat musí. Anežka také neměla tušení, proč její zachovávající se veličina vypadá pravě tak, jak si napsala do deníčku. Až poté, co se mohla do dózy podívat, zjistila, že její zákon je vlastně zákon zachování počtu kostek cukru. Jenže fyzici se bohužel do žádné dózy podívat nemohou, nelze si sáhnout na energii či na hybnost tak, jako si Anežka mohla ohmatat kostky cukru v dóze. To však již předbíháme do další kapitoly.

1.2 Původ zákonů zachování

V tomto textu pojednáme o třech zákonech zachování, a to o *zákonu zachování hybnosti*, *zákonu zachování momentu hybnosti* a *zákonu zachování energie* v rámci klasické mechaniky.

Tyto zákony zachování v tom rozsahu, ve kterém o nich budeme mluvit, se dají přímo odvodit z Newtonova zákonu síly. Tato odvození najdete v doporučené literatuře [3], [6]. Uvedené zákony se však neomezují jen na klasickou mechaniku, ale mají obecnější platnost (v elektrodynamice, kvantové mechanice, atd.). Jsou to hluboké zákony a je užitečné a názorné znát jejich původ. V této kapitole se vám o něm pokusíme povědět. Pokud následujícím řádkům nebudete rozumět či se již chcete pustit do řešení konkrétních problémů, klidně přeskočte na další kapitoly, kde jsou zákony definovány a použity při řešení příkladů.

Všechny tři zmíněné zákony zachování souvisejí se symetrií prostoročasu. Je to důvtipná a zajímavá skutečnost, kterou není jednoduché vysvětlit, ani se o to v tomto textu nebudeme snažit, toto najdete v knize [5]. Zákon zachování hybnosti má původ v symetrii prostoru při posunutí, zákon zachování momentu hybnosti pochází od symetrie prostoru při otočení a symetrie při posunutí v čase je původcem zákona zachování energie. Co tato věta znamená? Začneme se zákonem zachování hybnosti.

Zákon zachování hybnosti

Jestliže se při libovolném posunutí tělesa v daném směru nezmění energie tohoto tělesa, zachovává se hybnost tělesa v tomto směru. Jelikož se energie tělesa nezmění, libovolný fyzikální experiment s tělesem dopadne na obou místech stejně, tato dvě místa jsou tedy v tomto smyslu nerozlišitelná. Toto tvrzení neplatí jen pro tělesa, ale i pro soustavy částic.

Jako příklad uvažujme vodorovné posunutí po povrchu Země. Toto posunutí musí být však dostatečně malé, abychom mohli zanedbat zakřivení zemského povrchu. Dobře víte, že energie křídy je ve dvou rozích téže místnosti stejná, při přesunu křídy nemusíte konat žádnou práci. Vodorovná složka hybnosti se tedy musí zachovávat. Vodorovná složka hybnosti křídy vyhozené šikmo vzhůru se zachovává.

Naopak při svislém posunutí na povrchu Země musíme v jednom směru překonávat tíhovou sílu působící na křídu, v opačném směru křída padá volným pádem. Tudíž dvě místa v různých výškách nad povrchem Země mají různou potenciální energii a nejsou nerozlišitelná. Hybnost se ve svislém směru nezachovává.

Dále můžeme uvažovat, že posuneme celou Sluneční soustavou. Pokud bude posunutí vůči hvězdám dostatečně malé, takže se jejich působení změní nepatrně, můžeme říci, že hybnost naší Sluneční soustavy se zachovává. Na větší vzdálenosti to však neplatí, dobře víte, že naše sluneční soustava obíhá kolem středu galaxie zvané Mléčná dráha. Tím se dostáváme k dalšímu zákonu zachování.

Zákon zachování momentu hybnosti

Stejným způsobem jako souvisel zákon zachování hybnosti se symetrií při posunutí, souvisí zákon zachování momentu hybnosti se symetrií při otočení. Jestliže při otočení tělesa kolem dané osy zůstává energie tělesa nezměněná, zachovává se moment hybnosti tělesa vzhledem k této ose. Zdůrazňujeme, že moment hybnosti se pak zachovává nejenom při otáčení kolem dané osy, avšak při libovolném pohybu.

Typickým příkladem jsou centrální (radiální) pole, tj. taková pole, kde potenciální energie závisí jen na vzdálenosti od nějakého bodu – centra, nebo-li síla má vždy směr k tomuto centru. Centrálním polem je gravitační pole Země či Slunce, elektrické pole bodového náboje apod. Při otočení tělesa v centrálním poli kolem osy procházející centrem se energie nemění, neboť zůstáváme ve stejné vzdálenosti od centra. Ihned zjišťujeme, že platí zákon zachování momentu hybnosti vzhledem k ose procházející centrem.

V gravitačním poli Slunce se zachovává moment hybnosti Země, což je stejné tvrzení jako druhý Keplerův zákon. Vidíte, co všechno můžeme jenom pomocí zákonů zachování dokázat.

Zákon zachování energie

Zákon zachování energie souvisí s jinou důležitou vlastností světa – věci nezávisí na absolutním čase. Žádný výsledek fyzikálního experimentu, který připravíme přesně stejným způsobem, nezávisí na čase, kdy ho provedeme. Periodu kmitů kyvadla naměříme stejnou dnes i zítra, jestliže měření provedeme se stejným kyvadlem a na stejném místě. Nemůžeme s jistotou říci, zda je toto tvrzení pravdivé, ale veškerá fyzikální pozorování, která jsme dosud provedli, to potvrzují. Předpokládáme-li tuto symetrii času, lze odvodit zákon zachování energie vesmíru, celková energie vesmíru je konstantní.

Energie je abstraktní veličina, kterou dokážeme přisoudit každé oblasti prostoru – víme, jaká je energie letícího míče i jednoho litru mezihvězdného prostoru. Protože umíme energii takto lokalizovat, lze dokonce říci více než jen to, že energie vesmíru je konstantní. Platí, že energie se zachovává lokálně. To znamená, že pokud se energie jedné oblasti sníží, nemůže se o stejnou hodnotu najednou zvýšit energie jiné oblasti vzdálené několik světelných let. V celém vesmíru by sice zůstala energie stejná, ale v oblasti, jejíž energie se náhle snížila, by zákon zachování energie lokálně neplatil. Jestliže se energie jisté ohraničené oblasti snižuje, pak se musí energie v sousední oblasti zvyšovat, což můžeme vyjádřit tokem energie skrz hranice oblasti. Tok energie je fyzikální veličina, která proto musí vystupovat v zákonu zachování energie.[1]

Díky lokálnímu charakteru je zákon zachování energie velice užitečný pro řešení problémů. Jestliže závaží na pružině uzavřeme do krabice, jejíž stěny vyrobíme z izolačního materiálu, skrz který bude nulový tok energie, můžeme si být jisti, že energie soustavy uzavřené v krabici je konstantní. Pokud se pohybující závaží zastaví, klesne jeho pohybová energie na nulu, hodnota jiné formy energie však zase vzroste.

Energie má mnoho forem, my budeme uvažovat kinetickou energii, potenciální energii tíhového nebo gravitačního pole, energii pružnosti (stlačená pružina má schopnost konat práci). Pohyb závaží na pružině by neustal, kdyby nebylo ztrát. Tyto ztráty většinou zanedbáváme, ale v reálných situacích k (i nepatrným) ztrátám vždy dochází. Pohybová energie tělesa klesá na úkor tzv. vnitřní energie.

---

[1] Názorně si lze představit následující analogii. Prostor nechť je vyplněný tekutinou. Hmotnost této tekutiny odpovídá energii – celková hmotnost tekutiny v prostoru zůstává konstantní. Hmotnostní tok tekutiny pak odpovídá toku energie. Pokud se hmotnost tekutiny v nějaké oblasti sníží, musí odtud část tekutiny odtéci.

Asi víte, že látka se skládá z atomů, které konají neuspořádaný pohyb – neustále se pohybují, rotují, vibrují. Při pohybu závaží a pružiny o sebe některé části třou, pružina se natahuje a smršťuje. Při tom do sebe atomy narážejí a mění se jejich kinetická energie. Zatímco kinetická energie tělesa klesá, kinetická energie atomů konajících neuspořádaný pohyb roste. Tato kinetická energie atomů – vnitřní energie – se neprojevuje žádným viditelným pohybem a zdá se, že pouze klesá kinetická energie závaží. Mírou vnitřní energie je teplota, kterou můžeme snadno měřit. Vnitřní energie tělesa a okolního vzduchu roste.

Dále existuje elektromagnetická energie. Chemická energie se „uvolňuje" při chemických reakcích, například při hoření nebo dýchání. Chemická energie má dvě části – kinetickou energii elektronů v atomových obalech a elektrickou energii vzájemného přitahování a odpuzování elektronů a protonů atomů, které se účastní vazby. S uspořádáním protonů a neutronů v jádře souvisí jaderná energie, což je další (po gravitační a elektromagnetické) elementární forma energie.

Při formulaci speciální teorie relativity dospěl A. Einstein k nevyhnutelnému závěru, že s hmotností souvisí klidová energie. Tuto energii má těleso, i když je v klidu, a platí pro ni známý vztah $E = mc^2$, kde c je rychlost světla a m je klidová hmotnost tělesa. Klidová energie žádným způsobem nezávisí na tom, z jaké látky je těleso vyrobeno.

Poznámka: Odkud získává energii[2] *lidstvo?* Našimi primárními energetickými zdroji jsou Slunce, vítr, voda, uhlí, ropa, plyn a uran. Ze Slunce využíváme přímo energii záření. Energie, kterou získáváme z větru a vody, pochází ze Slunce, které na Zemi ohřívá vodu a vzduch. Při spalování uhlí, ropy nebo plynu se uvolňuje chemická energie, avšak ropa a uhlí vznikly působením Slunce a vody před desítkami a stovkami miliónů let. V jaderných elektrárnách štěpíme jádra atomů uranu, přičemž se uvolňuje především elektrická energie, která navzájem odpuzuje protony v jádře. Odkud pochází uran? Uran vzniká při výbuchu supernovy, kdy dojde k obrovskému nahromadění energie těsně před zánikem gigantické hvězdy. Při výbuchu se uvolní tolik energie, že dojde k postupnému slučování jader lehčích prvků, které je počínaje železem energeticky nevýhodné. Tak vznikají všechna jádra atomů, která mají více protonů než železo.

A odkud pochází energie záření Slunce či jakékoliv jiné hvězdy? Ve Slunci dochází ke slučování protonů (jader vodíku), přičemž se uvolňuje jaderná energie, tomuto procesu říkáme termonukleární reakce.[3]

---

[2] V tomto odstavci má slovo energie obecnější význam.

[3] Lidstvo dokáže získat energii z vodíku pouze nebezpečnou metodou výbuchu. Kdybychom v reaktoru dokázali řídit termonukleární reakci, mohlo by se z tekoucí vody o průtoku několik desítek litrů za sekundu získat tolik energie, kolik spotřebuje celý svět. Je proto úkolem fyziků

2 Zákon zachování hybnosti

Hybnost hmotného bodu definujeme jako součin hmotnosti a rychlosti hmotného bodu

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}\,.$$

Hybnost soustavy částic je součtem hybností jednotlivých částic. Hybnost je vektorová veličina, má tři nezávislé složky.

V předcházející kapitole jsme vysvětlili, proč se na povrchu Země zachovává vodorovná složka hybnosti tělesa a svislá nikoliv. Víme, že se hybnost zachovává v těch směrech, ve kterých se nemění energie. To platí zcela obecně – i ve speciální teorii relativity, kde závisí hmotnost tělesa na jeho rychlosti.

Zákon zachování hybnosti lze využít při řešení mnoha úloh, ve kterých lze zanedbat odpor prostředí.

Příklad 1 – sáně na jezeře

Sáně se sáňkařem o celkové hmotnosti M, stojí v klidu na zamrzlém jezeře. Na saních jsou naloženy dva kameny o hmotnostech m_1 a m_2, přičemž $m_1 = M/6$ a $m_2 = M/12$. Sáňkař chce uvést sáně do pohybu tím, že dozadu vyhodí oba kameny vodorovnou rychlostí v_{rel} vzhledem k sáňkám. Určete konečnou rychlost saní, vymrští-li člověk kameny

a) současně,
b) nejprve těžší kámen, potom lehčí,
c) nejprve lehčí kámen, potom těžší.

Tření mezi skluznicemi saní a ledem zanedbejte.

Řešení

Ve vodorovném směru platí zákon zachování hybnosti, protože v tomto směru na saně s kameny nepůsobí žádné síly. Vodorovná složka počáteční hybnosti soustavy saní, sáňkaře a kamenů je vzhledem k ledu nulová, a tak tomu musí být i po odhození obou kamenů.

a) Konečnou velikost rychlosti saní označíme v. Musí platit, že výsledná hybnost je nulová, neboli velikost hybnosti odhozených kamenů se musí rovnat velikosti hybnosti na opačnou stranu se pohybujících saní. Odhozené kameny

vymyslet způsob, jak to udělat, aby nás osvobodili z hrozící energetické krize. Politici už konečně přestali zavírat oči před tímto závažným problémem. V nedávné době evropská unie uvolnila nemalou částku eur, aby mohla započít stavba obrovského zkušebního reaktoru pro výzkum termonukleární reakce.

se vzhledem k zemi pohybují rychlostí $v_{\mathrm{rel}} - v$, neboť je sáňkař odhodil rychlostí v_{rel} vzhledem k saním.

$$0 = Mv - (m_1 + m_2)(v_{\mathrm{rel}} - v)\,.$$

Odtud dostaneme

$$v = \frac{m_1 + m_2}{M + m_1 + m_2}\, v_{\mathrm{rel}} = \frac{1}{5}\, v_{\mathrm{rel}} = 0{,}200\, v_{\mathrm{rel}}\,.$$

b) Po odhození těžšího kamene o hmotnosti m_1 získají sáně s lehčím kamenem o hmotnosti m_2 rychlost o velikosti v_1

$$0 = (m_2 + M)v_1 - m_1(v_{\mathrm{rel}} - v_1) \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{m_1}{M + m_1 + m_2}\, v_{\mathrm{rel}}\,.$$

Druhý kámen odhazuje sáňkař rychlostí v_{rel} vůči saním, takže rychlostí o velikosti $v_{\mathrm{rel}} - v$ vůči ledu. Znovu použijeme zákon zachování hybnosti

$$(m_2 + M)v_1 = Mv - m_2(v_{\mathrm{rel}} - v)\,.$$

Do této rovnice dosadíme za v_1 a dostaneme

$$\frac{m_1(m_2 + M)}{M + m_1 + m_2}\, v_{\mathrm{rel}} = (M + m_2)v - m_2 v_{\mathrm{rel}}\,,$$

odtud

$$v = \frac{m_1(M + m_2) + m_2(M + m_1) + m_2^2}{(M + m_2)(M + m_1 + m_2)}\, v_{\mathrm{rel}} = \frac{41}{195}\, v_{\mathrm{rel}} \doteq 0{,}210\, v_{\mathrm{rel}}\,.$$

c) Necháme na vás, abyste ověřili, že pokud nejdříve odhodíme lehčí kámen, bude výsledná velikost rychlosti saní rovna

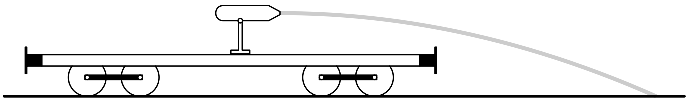
$$v = \frac{22}{105}\, v_{\mathrm{rel}} = \frac{286}{287}\frac{41}{195}\, v_{\mathrm{rel}} \doteq 0{,}210\, v_{\mathrm{rel}}\,.$$

Nejvýhodnější je vymrštit nejprve těžší kámen, potom lehčí.

Příklad 2 – vodní dělo na vagónu

Otevřený vagón o hmotnosti $M = 30\,\mathrm{t}$ stojí nezabržděn na vodorovných kolejnicích. Na vagónu je nainstalované vodní dělo. Za minutu z děla vystříkáme hektolitrovou nádrž. Vodu stříkáme rovnoběžně s kolejnicemi rychlostí $u = 15\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, proud vody dopadá mimo vagón. Změnu hmotnosti vagónu tím způsobenou můžete zanedbat stejně jako valivý odpor při pohybu vagónu po kolejnici.

a) Jaké bude zrychlení vagónu během stříkání vody?
b) Jaká bude konečná rychlost vagónu?



Obr. 1

Řešení

Stejně jako v případě sáněk na ledě se bude zachovávat vodorovná složka celkové hybnosti vagónu a vody. Voda vystřelená z děla má jistou vodorovnou hybnost. Má-li zůstat celková hybnost konstantní, musí získat vagón stejnou hybnost opačného směru – vagón se tedy začne pohybovat opačným směrem, než proudí voda ve vagónu.

a) Platí-li, že velikost rychlosti pohybu vagónu je dost malá vůči velikosti rychlosti vody, kterou střílíme z děla, potom je rychlost vody vůči dělu stejná jako rychlost vody vůči kolejím. Tento předpoklad ověříme na konci řešení.

Hmotnostní tok vody dělem je $Q = \varrho V/T$, kde ϱ je hustota vody, $V = 100\,\mathrm{l}$ je objem nádrže a $T = 1\,\mathrm{min}$ je doba, po kterou střílíme z děla. Předpokládejme, že známe velikost rychlosti vagónu $v(t)$ v čase t měřeného od započetí stříkání vody. Sledujme, co se stane v následující době Δt. Z děla bude vystřelena voda o hmotnosti $Q\Delta t$, její hybnost bude $Q\Delta t u$. Zanedbáme-li změnu hmotnosti vagónu, pro velikost rychlosti vagónu $v(t{+}\Delta t)$ v čase $t{+}\Delta t$ dle zákona zachování hybnosti platí rovnice

$$Mv(t) = Mv(t + \Delta t) - Q\Delta t u\,.$$

Vyjádříme novou rychlost

$$v(t + \Delta t) = v(t) + \frac{Qu}{M}\,\Delta t\,.$$

Srovnáním tohoto vztahu se vztahem pro rovnoměrně zrychlený pohyb $v = v_0 + at$ získáme výraz pro velikost zrychlení vagónu

$$a = \frac{Qu}{M} = \frac{\varrho V u}{MT} = \frac{100 \cdot 1 \cdot 15}{30\,000 \cdot 60}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} = 0{,}83\,\mathrm{mm{\cdot}s^{-2}}\,.$$

b) Konečná velikost rychlosti vagónu bude

$$v = aT = \frac{\varrho V u}{M} = \frac{100 \cdot 1 \cdot 15}{30\,000}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 0{,}05\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Výsledek závisí jen na poměru hmotnosti vody v nádrži a hmotnosti vagónu a odpovídá zákonu zachování hybnosti ve tvaru $Mv = \varrho V u$.

Na závěr řešení bychom se měli vrátit k úvodnímu předpokladu. Poměr konečné velikosti rychlosti vagónu a rychlosti, jakou je vystřelována voda, je roven poměru hmotnosti vody v nádrži a hmotnosti vagónu. Jelikož jsme podle zadání měli zanedbat hmotnost vody vůči hmotnosti vagónu, můžeme si jistě dovolit zanedbat i velikost rychlosti vagónu vůči velikosti rychlosti vystřelujicí vody. To je ovšem také patrné z velikosti konečné rychlosti vagónu $v = 0{,}05\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

3 Zákon zachování momentu hybnosti

Uvažujme hmotný bod P, který koná rovinný pohyb. Dále si zvolme osu o kolmou na rovinu vymezenou jeho pohybem. Moment hybnosti[4] hmotného bodu P vzhledem k dané ose o definujeme jako součin velikosti vektoru hybnosti, vzdálenosti bodu P od osy o a sinu orientovaného úhlu mezi vektorem hybnosti a nejkratší spojnicí osy o s bodem P

$$L = pr \sin\varphi$$

(viz obr. 2, kde je osa o je kolmá na rovinu obrázku a prochází bodem O). Definujme vektor $\boldsymbol{p}_\mathrm{t}$, který je kolmý na vektor $\boldsymbol{r}$ a pro jehož souřadnici platí $p_\mathrm{t} = p \sin\varphi$. Potom moment hybnosti můžeme vyjádřit jako $L = p_\mathrm{t} r$, také

$$L = mv_\mathrm{t} r = mr^2 \omega\,,$$

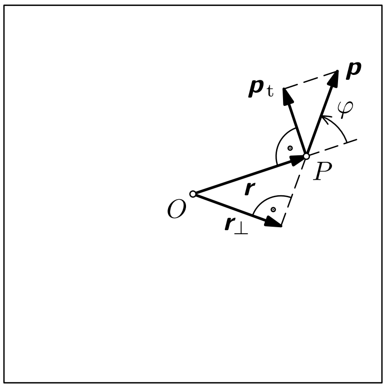
kde ω je úhlová rychlost průvodiče bodu P vzhledem k ose o. Rovněž můžeme definovat vektor $\boldsymbol{r}_\perp$, pro jehož souřadnici platí $r_\perp = r \sin\varphi$, potom pro moment hybnosti lze psát

$$L = pr_\perp\,.$$

Podobným způsobem můžeme vyjádřit moment hybnosti tělesa

$$L = J\omega\,,$$

kde J je moment setrvačnosti tělesa vzhledem ke zvolené ose.



Obr. 2

[4]Moment hybnosti je ve skutečnosti vektor. Jelikož se však omezíme na rovinné pohyby, vystačíme s jednou složkou.

V první kapitole jsme dospěli k závěru, že působí-li jen centrální síly, zachovává se moment hybnosti tělesa vzhledem k libovolné ose procházející centrem. Obecně platí, že pokud na těleso působí nulový moment síly vůči ose otáčení, zachovává se jeho moment hybnosti, pak totiž při otáčení nemusíme konat práci. Toho využijeme při řešení následujících příkladů.

Příklad 3 – člověk na rotující desce

Člověk stojí s upaženýma rukama na vodorovné desce, která bez tření rotuje s frekvencí $1{,}2\,\mathrm{ot{\cdot}s^{-1}}$. V každé ruce drží závaží. Moment setrvačnosti člověka, závaží a desky vzhledem k ose otáčení je $J_0 = 6{,}0\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$. Člověk připaží a zmenší tak moment setrvačnosti na $J_1 = 2{,}0\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$.

a) Jak se změní frekvence rotace desky?
b) Vypočítejte, jak se změní kinetická energie soustavy.
c) Jak vysvětlíte případnou změnu kinetické energie?

Řešení

a) Na desku a člověka působí pouze tíhová síla, jejíž vektor je rovnoběžný s osou rotace. V rovině rotace nepůsobí žádná vnější síla a platí proto zákon zachování momentu hybnosti vzhledem k ose otáčení. Tento zákon vyjádříme jednoduchou rovnicí

$$J_0\omega_0 = J_1\omega_1\,,$$

kde ω_0 je počáteční úhlová rychlost a ω_1 je výsledná úhlová rychlost poté, co člověk připažil. Takže dostáváme

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{J_0}{J_1}\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{J_0}{J_1}\,f_0 = 3{,}6\,\mathrm{ot{\cdot}s^{-1}}.$$

b) Kinetická energie rotačního pohybu je $J\omega^2/2$. Poměr kinetické energie po připažení a před ním je

$$\frac{J_1\omega_1^2}{J_0\omega_0^2} = \frac{J_0}{J_1} = 3\,.$$

Kinetická energie rotačního pohybu se tedy zvýšila, vypočítejme ještě, o kolik

$$\Delta E = \frac{1}{2}\,J_1\omega_1^2 - \frac{1}{2}\,J_0\omega_0^2 = J_0\omega_0^2 = 4\pi^2 J_0 f_0^2 = 340\,\mathrm{J}\,.$$

c) Kinetická energie soustavy se zvětší o práci vykonanou člověkem při přiblížení závaží k ose dostředivou silou. Ta se koná na úkor jeho vnitřní energie.

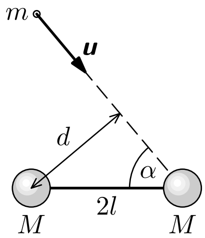
Také vás může napadnout, jaký moment síly způsobil roztočení desky. Přiblížením závaží ke středu zmenšujeme jejich okamžitou rychlost. Paže tedy na závaží působí kromě dostředivé síly ještě silou namířenou proti jejich okamžité rychlosti, kterou je brzdí. Podle principu akce a reakce působí závaží na paži reakcí namířenou ve směru jejich okamžité rychlosti a tím zvětšují úhlovou rychlost celé soustavy.

Příklad 4 – malý velký problém

Hvězdný koráb se skládá ze dvou kabin o hmotnosti M, mezi nimiž se nalézá spojnice délky $2l$ (koráb tedy vypadá jako na obr. 3). Koráb byl v relativním klidu, když náhle byla jedna z kabin zasažena malým (hmotnost $m \ll M$) meteoritem, jehož rychlost byla $\boldsymbol{u}$. Malý meteorit zůstal uvězněný v kabině. Po této fatální kolizi se loď začala pohybovat a také rotovat (úhlovou rychlost rotace označme ω).

a) Jaká bude rychlost korábu po srážce?

b) Jaká je vzdálenost přímky, po které se meteorit pohyboval, od nezasažené kabiny?



Obr. 3

Řešení

Předpokládejme, že rychlost $\boldsymbol{u}$ meteoritu má směr ke středu jedné z kabin, jak je znázorněno na obrázku 3. Srážku budeme popisovat v rovině určené vektorem $\boldsymbol{u}$ a spojnicí středů obou kabin. Tato rovina je výhodná, protože se v ní bude odehrávat veškerý pohyb. Těžiště soustavy korábu a meteoritu je ve středu spojnice obou kabin, neboť dle zadání je hmotnost meteoritu malá. Úhel mezi vektorem rychlosti $\boldsymbol{u}$ a spojnicí kabin označíme α.

a) Jelikož na soustavu korábu a meteoritu nepůsobí žádné síly, platí i během srážky zákon zachování hybnosti, a tedy $2Mv = mu$, kde v je velikost rychlosti těžiště po nárazu. Těžiště korábu se bude pohybovat pomalým posuvným pohybem, jehož rychlost bude mít směr stejný jako $\boldsymbol{u}$ a velikost $u \cdot m/2M$.

b) Hledaná vzdálenost je $d = 2l \sin \alpha$. Po nárazu se začne koráb kolem svého těžiště otáčet. Nyní musíme stanovit, jak výsledná úhlová rychlost otáčení ω souvisí s úhlem α. To určíme ze zákona zachování momentu hybnosti vzhledem k ose procházející těžištěm soustavy korábu a meteoritu, který platí, neboť na soustavu korábu a meteoritu nepůsobí žádné vnější síly (tudíž ani momenty sil).

Moment hybnosti hvězdného korábu před srážkou je nulový, letícího meteoritu $mul \sin \alpha$. Po srážce je moment hybnosti meteoritu velmi malý (zanedbáme ho) a hvězdného korábu $J\omega$. Tedy podle zákona zachování momentu hybnosti platí

$$mul \sin \alpha = J\omega \,.$$

Dále musíme vyjádřit moment setrvačnosti korábu J vzhledem k ose procházející středem spojnice kabin. Budeme-li kabiny považovat za malé vzhledem k délce spojnice, dostaneme

$$J = 2Ml^2 \,.$$

Dosazením do předchozího vztahu obdržíme

$$\sin \alpha = \frac{2Ml\omega}{mu} \,.$$

Nyní již vypočítáme vzdálenost přímky, po které se pohyboval meteorit, a nezasažené kabiny.

$$d = \frac{4Ml^2\omega}{um} \,.$$

Může se vám zdát, že při řešení příkladu jsme mohli použít zákon zachování energie. Toto však nelze, protože srážka meteoritu s kabinou je složitý proces. Dochází například k šíření zvukových vln kabinou či ohřevu materiálu kabiny. Vnitřní energie kabiny vzroste, její hodnotu však nedokážeme určit.

4 Zákon zachování energie

Již jsme si řekli v první kapitole, že energie má mnoho forem. V tomto krátkém textu se všemi podrobně zabývat nebudeme, to by dalece přesáhlo skromný rozsah této publikace. Připomeneme si ty formy energie, které znáte ze školy.

Kinetická energie souvisí s pohybovým stavem tělesa, které má hmotnost m a rychlost o velikosti v, určíme ji

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}\, mv^2 \,.$$

Těleso, které se otáčí kolem dané osy úhlovou rychlostí ω a má vzhledem k této ose moment setrvačnosti J, má kinetickou energii

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}\, J\omega^2 \,.$$

V tíhovém poli v blízkosti povrchu Země má těleso o hmotnosti m potenciální energii

$$E_{\mathrm{p}} = mgh \,,$$

kde h je výška nad nulovou hladinou potenciální energie a $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ je velikost tíhového zrychlení. Nulovou hladinu potenciální energie můžeme zvolit v libovolné výšce, tak jak nám to vyhovuje při řešení problému. Například pokud nás zajímá pohyb kyvadla, zvolíme nulovou hladinu ve výšce nejnižší polohy kyvadla.

Poslední energie, kterou zmíníme, je energie pružnosti. Pružina, která má tuhost k a je z nezatížené polohy stlačena nebo prodloužena o vzdálenost x, má potenciální energii pružnosti

$$E_{\mathrm{pr}} = \frac{1}{2}\, kx^2 \,.$$

Konstantní síla působící na těleso, která má pohybový účinek, koná práci

$$W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{d} = Fd\cos\alpha \,,$$

kde $\boldsymbol{d}$ je posunutí způsobené silou, α je úhel mezi vektorem posunutí a vektorem síly. To jinými slovy znamená, že působením síly se mění energie tělesa o hodnotu W.

Poslední vztah využíváme, když se energie tělesa mění působením *disipativních* sil, což jsou síly, při kterých klesá mechanická energie tělesa na úkor vnitřní energie soustavy. Disipativní síly působí vždy proti směru pohybu tělesa, konají tedy práci, která je záporná. Tyto síly pocházejí od krátkodosahové interakce atomů (síla tření, odporová síla, apod.). K jejich vysvětlení bychom museli vycházet z mikroskopických detailů studovaného děje, což by bylo natolik složité, že by to nevedlo k žádnému výsledku. Pro tyto síly běžně používáme experimentálně zjištěné vztahy, které neberou v úvahu všechny jemné efekty a platí jen do jisté míry přesnosti. Změna energie tělesa je pak rovna práci, kterou síla vykonala.

Naproti tomu tíhová síla či síla pružnosti jsou síly *konzervativní.* Práce, kterou tyto síly vykonají při pohybu tělesa mezi dvěma body, nezávisí na trajektorii tělesa. Práci lze určit pouze ze znalosti počáteční a koncové polohy tělesa. Například práce, kterou vykoná tíhová síla, závisí jen na rozdílu počáteční a koncové výšky tělesa. Pro každou konzervativní sílu existuje potenciální energie (tíhová síla – tíhová potenciální energie, síla pružnosti – potenciální energie pružnosti). Výpočet práce konzervativní síly je tedy snadný, odpovídá rozdílu potenciální energie.

Uvedené vztahy budeme potřebovat v následujících úlohách, ve kterých využijeme zákon zachování energie.

Příklad 5 – bedna na nakloněné rovině

Dělník tlačí bednu o hmotnosti 25,0 kg vzhůru po nakloněné rovině, která svírá úhel 25,0° s vodorovnou rovinou. Působí na ni při tom silou o velikosti 209 N, která je rovnoběžná s nakloněnou rovinou. Vypočtěte práci, kterou při posunutí bedny o 1,50 m vykonají následující síly působící na bednu:

a) síla, kterou působí dělník,
b) tíhová síla,
c) normálová síla, jíž působí nakloněná rovina na těleso,
d) třecí síla, pokud je bedna na začátku i na konci pohybu v klidu.

Řešení

Hmotnost bedny označíme m, velikost síly dělníka F, posunutí bedny d a úhel nakloněné roviny α.

a) Dělník působí silou, která je rovnoběžná s posunutím bedny. Pro práci, kterou vykoná, proto platí

$$W = Fd = 313\,\mathrm{J}\,.$$

b) Tíhová potenciální energie bedny roste při posunování bedny vzhůru po nakloněné rovině. Dělník vytlačí bednu do výšky $d \sin \alpha$. Práce W_p, kterou vykoná tíhová síla, je záporná a v absolutní hodnotě je rovna přírůstku potenciální energie.

$$W_\mathrm{p} = -\Delta E_\mathrm{p} = -mgd\sin\alpha = -155\,\mathrm{J}\,.$$

Tento výsledek můžeme vypočítat i jiným způsobem. Tíhová síla, která míří svisle dolů, svírá se směrem posunutí úhel $\alpha + 90°$. Dosadíme do vztahu pro práci a dostaneme

$$W_\mathrm{p} = mgd\cos{(\alpha + 90°)} = -mdg\sin\alpha\,.$$

c) Normálová síla působí na bednu ve směru kolmém na povrch nakloněné roviny. Její směr je kolmý na směr pohybu bedny. Normálová síla tedy nemá pohybový účinek a nekoná žádnou práci.

d) Jelikož byla bedna na začátku i na konci pohybu v klidu, je součet prací všech sil roven nule. Pro práci W_t třecí síly tedy platí

$$W_\mathrm{t} = -W - W_\mathrm{p} = -Fd + mgd\sin\alpha = -158\,\mathrm{J}\,.$$

Absolutní hodnota této práce je rovna změně vnitřní energie nakloněné roviny a bedny.

Příklad 6 – bungee-jumping

Vyznavač bungee-jumpingu se chystá skočit z mostu vysokého $H = 45{,}0\,\mathrm{m}$ na pružném laně dlouhém $L = 25{,}0\,\mathrm{m}$, jehož tuhost je $k = 160\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$. Hmotnost skokana je $m = 61{,}0\,\mathrm{kg}$. Lano má skokan přivázané ke kotníkům, sledujeme trajektorii právě kotníků. Výšku skokana zanedbejte.

a) Jaká bude výška skokana nad hladinou řeky v nejnižším bodě jeho trajektorie po seskočení z mostu?
b) Jaká síla působí na skokana v nejnižším bodě?
c) V jaké výšce má skokan největší rychlost? Určete tuto rychlost.

Řešení

a) Využijeme zákon zachování energie, ztráty dané odporem vzduchu a napínáním pružiny zanedbáme. V nejnižším bodě trajektorie (ve výšce h nad hladinou) se skokan na chvíli zastaví, jeho kinetická energie je zde nulová. Úbytek potenciální energie skokana (hmotnost lana zanedbáme) se projeví nárůstem energie pružnosti lana. Tuto myšlenku vyjádříme následující rovnicí

$$mg(H - h) = \frac{1}{2}\,k(H - h - L)^2\,.$$

Skokan totiž vzduchem proletí svislou vzdálenost $H - h$ a lano se protáhne o $H - h - L$ vůči své klidové délce L. Z této rovnice stačí vyjádřit h a máme první část úlohy vyřešenou. Rovnice je však kvadratická, a tak dostáváme dvě řešení

$$h = H - L - \frac{mg}{k} \pm \sqrt{\frac{mg}{k}\left(2L + \frac{mg}{k}\right)}\,.$$

Jistě víme, že se lano natáhlo, proto musí být $h < H - L$. Výraz pod odmocninou je větší než $(mg/k)^2$, takže fyzikálně správné řešení je se znaménkem minus. Nejnižší výška skokana nad hladinou řeky vychází $h = 2{,}08\,\mathrm{m}$, právě, aby se nenamočil.

b) Na skokana působí dvě síly – tíhová o velikosti mg a síla pružnosti o velikosti kx. Celková síla působící na skokana v nejnižším bodě míří vzhůru (neboť je skokan urychlován směrem nahoru) a má velikost

$$F = k(H - h - L) - mg = \sqrt{mg\,(2kL + mg)} = 2\,270\,\mathrm{N}\,.$$

Taková síla uděluje skokanovi v nejnižím bodě zrychlení $a = F/m = 37{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, což je asi čtyřnásobek tíhového zrychlení.

c) Do okamžiku, než se začne napínat lano, je skokan urychlován tíhovou silou. Následně začíná síla pružnosti lana růst, skokan však neustále zrychluje, dokud se síla pružnosti nevyrovná tíhové síle (ve výšce h')

$$k(H - h' - L) = mg\,.$$

Po tomto okamžiku síla pružnosti převládne a skokan zpomaluje. Nejvyšší rychlost má tedy skokan ve výšce

$$h' = H - L - \frac{mg}{k} = 16{,}3\,\mathrm{m}\,.$$

Rychlost skokana v této výšce určíme snadno ze zákona zachování energie

$$mg(H - h') = \frac{1}{2}\,mv^2 + \frac{1}{2}\,k(H - h' - L)^2\,,$$

odkud dostaneme

$$v = \sqrt{2g(H - h') - \frac{k(H - h' - L)^2}{m}} = \sqrt{2gL + \frac{mg^2}{k}} = 23{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Příklad 7 – náraz na pružinu

Kostka o hmotnosti $m = 2{,}5\,\mathrm{kg}$ narazila na jeden konec vodorovné pružiny zanedbatelné hmotnosti o tuhosti $k = 320\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$ a začala ji stlačovat. V okamžiku, kdy pružina kostku zastavila, byla pružina stlačena o $d = 7{,}5\,\mathrm{cm}$. Součinitel smykového tření mezi kostkou a podložkou je $f = 0{,}25$.

a) Jakou práci vykonala pružná síla působící na kostku během brzdění?
b) K jak velké změně mechanické energie došlo vlivem působení třecích sil?
c) Jaká byla velikost rychlosti v kostky v okamžiku nárazu na pružinu?

Řešení

a) Práce, kterou vykonala pružná síla, je rovna úbytku potenciální energie pružnosti

$$W_\mathrm{p} = -\Delta E_\mathrm{p} = -\frac{1}{2}\,kd^2 = -0{,}90\,\mathrm{J}\,.$$

b) Změna mechanické energie působením třecí síly je dána prací, kterou vykonala třecí síla. Třecí síla působící na kostku má velikost fmg, takže

$$W_\mathrm{t} = -fmgd = -0{,}46\,\mathrm{J}\,.$$

c) Těsně před nárazem měla kostka kinetickou energii $mv^2/2$ a pružina byla nestlačená. Po nárazu se začala pružina stlačovat, navíc kostka třela o podložku, což způsobilo pokles kinetické energie kostky. Počáteční kinetická energie je tedy rovna součtu potenciální energie pružiny a práce spotřebované třecí silou.

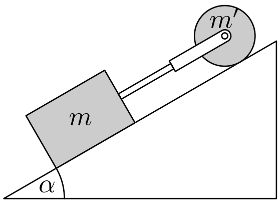
$$\frac{1}{2}\,mv^2 = \frac{1}{2}\,kd^2 + fmgd\,.$$

Z této rovnice vyjádříme velikost rychlosti kostky těsně před nárazem

$$v = \sqrt{\frac{kd^2}{m} + 2fgd} = 1{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Příklad 8 – válec a kvádr na nakloněné rovině

Kvádr o hmotnosti m a válec o hmotnosti m' a poloměru r leží na nakloněné rovině. Obě tělesa jsou spojena tuhou tyčkou a třmenem (viz obr. 4). Součinitel smykového tření mezi kvádrem a nakloněnou rovinou je f, mezi válcem a nakloněnou rovinou je dostatečně velký, aby docházelo k odvalování válce bez skluzu. Jaké bude zrychlení soustavy, pokud se dá soustava do pohybu?



Obr. 4

Řešení

Uvažujme pohyb soustavy po dráze d, na které soustava zrychlí z nulové rychlosti na rychlost o velikosti v a její výška klesne o $d \sin \alpha$. Pokles potenciální energie válce a kvádru je roven změně kinetické energie posuvného pohybu válce a kvádru, změně kinetické energie rotačního pohybu válce a práci, kterou spotřebovala třecí síla. Úhlová rychlost rotace válce je za předpokladu, že válec odvaluje bez skluzu, rovna $\omega = v/r$. Zákon zachování energie tedy vystihuje rovnice

$$(m + m')gd \sin \alpha = \frac{1}{2}(m + m')v^2 + \frac{1}{2} J \left(\frac{v}{r}\right)^2 + mgdf \cos \alpha \,,$$

kde J jsme označili moment setrvačnosti válce vzhledem k jeho ose. Ze vztahů pro rovnoměrně zrychlený pohyb dostaneme $a = v^2/2d$. Z poslední rovnice tedy obdržíme výsledek

$$a = \frac{(m + m')g \sin \alpha - fmg \cos \alpha}{m + m' + J/r^2} \,.$$

Příklad 9 – paradox letadel

Dvě letadla letí vedle sebe stejnou rychlostí $v = 200\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Náhle jedno vystřelí z kanonu střelu o hmotnosti $m = 2\,\mathrm{kg}$ rychlostí $u = 250\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ (měřeno z druhého letadla). Ve vztažné soustavě spojené s druhým letadlem získala střela při výstřelu kinetickou energii $\frac{1}{2}mu^2 = 62{,}5\,\mathrm{kJ}$. Podle pozorovatele na zemi se rychlost střely při výstřelu zvětšila z v na $v + u$ a její kinetická energie vzrostla z $\frac{1}{2}mv^2 = 40\,\mathrm{kJ}$ na $\frac{1}{2}m(v+u)^2 = 202{,}5\,\mathrm{kJ}$, tedy o $162{,}5\,\mathrm{kJ}$. Práce vykonaná kanonem při výstřelu však musí být v obou vztažných soustavách stejná. Určete její velikost a vysvětlete rozdíl mezi přírůstkem kinetické energie střely v obou vztažných soustavách.

Řešení

Hodnota energie sice závisí na volbě vztažné soustavy, platnost zákona zachování energie a hybnosti však nikoli. Po výstřelu se rychlost prvního letadla

dla změní a tím tedy i jeho kinetická energie. Změna kinetické energie střely a změna kinetické energie letadla je podle pozorovatele v letadle a na zemi různá, ale součet změn je v obou soustavách stejný a je roven vnitřní práci kanonu.

Letadlo má hmotnost $M = 50\,\mathrm{t}$. Vyřešme problém nejdříve ze soustavy spojené s druhým letadlem. Letadlo má před výstřelem nulovou hybnost, po výstřelu je podle zákona zachování hybnosti součet hybnosti letadla a střely roven nule, tedy

$$0 = -Mv' + mu \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{m}{M}\,u = 0{,}01\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,,$$

kde v' je velikost rychlosti letadla po výstřelu. Součet změny kinetické energie střely a letadla je

$$W = \frac{1}{2}\,mu^2 + \frac{1}{2}\,Mv'^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{m}{M}\right)mu^2\,.$$

Pozorovatel na zemi zjistí, že rychlost střely se zvětšila z v na $v + u$ a že rychlost letadla klesla z v na $v - v'$. Změna kinetické energie střely je

$$\Delta E_{\text{střela}} = \frac{1}{2}\,m(v+u)^2 - \frac{1}{2}\,mv^2 = \frac{1}{2}\,mu^2 + mvu$$

a změna kinetické energie letadla je

$$\Delta E_{\text{letadlo}} = \frac{1}{2}\,M(v-v')^2 - \frac{1}{2}\,Mv^2 = \frac{1}{2}\,Mv'^2 - Mvv'\,.$$

Součet obou změn je (za v' dosadíme ze zákona zachování hybnosti)

$$W' = \frac{1}{2}\,mu^2 + mvu + \frac{1}{2}\,Mv'^2 - Mvv' = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{m}{M}\right)mu^2 \doteq 62{,}5\,\mathrm{kJ}\,.$$

Vnitřní práce kanonu je vskutku v obou vztažných soustavách stejná, zdánlivý rozpor byl způsoben neuvážením (ač malé) změny rychlosti letadla.

5 Srážky

V této poslední kapitole budeme studovat problémy, kde hrají hlavní roli srážky[5] těles. Srážka je krátkodobý děj, při němž na sebe tělesa vzájemně působí poměrně značnými silami. Jelikož je srážka okamžitý děj, platí zákon zachování hybnosti soustavy všech těles, které se účastní srážky, ve všech směrech.

Náhodně se pohybující atomy tělesa mají nenulovou celkovou kinetickou energii (tj. vnitřní energii), i když je těleso v klidu. Jelikož sčítáme kinetické energie atomů $\frac{1}{2}mv^2$, kde rychlost vystupuje ve druhé mocnině, záleží na velikosti rychlosti, nikoli na jejím směru. Každý atom má nějakou rychlost, proto po sečtení energií všech atomů dostaneme hodnotu vnitřní energie větší než nula. Každý atom má také hybnost $m\boldsymbol{v}$, a když sečteme takovéto příspěvky k hybnosti všech atomů v tělese, můžeme rovněž dostat nenulový vektor. To však znamená, že se atomy pohybují jedním směrem častěji, a toho si nelze nevšimnout, neboť celé těleso se bude pohybovat. Použití zákona zachování hybnosti je tedy snadné, neb celková hybnost tělesa je rovna součinu jeho hmotnosti a rychlosti těžiště. Nenulovou hybnost mají právě ta tělesa, která se pohybují.

Zákon zachování energie je ovšem komplikovanější. Část kinetické energie tělesa se může snížit na úkor vzrůstu vnitřní kinetické energie atomů. Zákon zachování energie samozřejmě platí vždy, jenom je obtížné sledovat pohyb všech atomů a kvalitativně to popsat. Z toho důvodu rozlišujeme *pružné srážky*, během kterých se zachovává celková mechanická (tj. kinetická a potenciální) energie těles účastnících se srážky, a *nepružné srážky*, kde zákon zachování mechanické energie neplatí (tělesa se při srážce zahřejí apod.). Speciálním případem nepružné srážky je *dokonale nepružná srážka*, při které se tělesa po srážce spojí (například plastelína, která dopadne na zem).

Příklad 10 – pružná srážka

Na vodorovné vzduchové dráze se mohou volně pohybovat dva vozíky. Jeden z nich je na počátku v klidu a druhý do něho narazí. Dojde k pružné srážce, po níž se oba vozíky rozjedou na opačné strany rychlostmi stejné velikosti. Jaký je poměr jejich hmotností?

Řešení

Vzhledem k tomu, že se vozíky pohybují po vzduchové dráze, zanedbejme odpor proti jejich pohybu. Po celou dobu tedy platí zákon zachování hybnosti i mechanické energie, neboť se jedná o pružnou srážku.

[5] Přesněji řečeno rázy, ale budeme používat vžité slovo srážky.

Hmotnost prvního vozíku, který je v klidu, označme m_1, hmotnost druhého označme m_2 a velikost jeho rychlosti v_2. Po srážce budou mít oba vozíky opačnou rychlost o velikosti v. Zákon zachování hybnosti vyjadřuje rovnice

$$m_2 v_2 = m_1 v - m_2 v$$

a zákon zachování energie

$$\frac{1}{2}\, m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}\, m_1 v^2 + \frac{1}{2}\, m_2 v^2 \,.$$

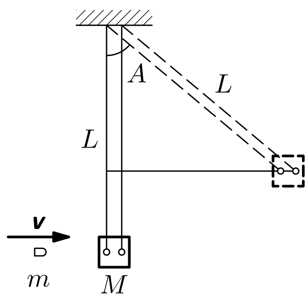
Z první rovnice vyjádříme $v_2 = (\mu - 1)v$, kde symbolem μ jsme označili poměr hmotností $\mu = m_1/m_2$, a dosadíme do rovnice druhé. Rovnici pokrátíme kvadrátem rychlosti v^2, dostaneme

$$\frac{1}{2}\, m_2 (\mu - 1)^2 = \frac{1}{2}\, m_1 + \frac{1}{2}\, m_2 \quad \Rightarrow \quad (\mu - 1)^2 = \mu + 1 \,.$$

Z této již snadno vyjádříme hledaný poměr $\mu = 0$ nebo $\mu = 3$. První možnost zřejmě nemá smysl, výsledek tedy je $m_1 = 3m_2$.

Příklad 11 – balistické kyvadlo

Rychlost kulky vystřelené z pušky se dříve měřila pomocí balistického kyvadla. Střela o známé hmotnosti m a neznámé rychlosti v vletí do dřevěné bedničky s pískem o hmotnosti M zavěšené na vlákně délky L a uvázne v ní. Bednička se tím uvede do pohybu a začne se kývat. Změřením amplitudy úhlové výchylky A můžeme určit rychlost kulky. Najděte potřebný vztah.



Obr. 5

Řešení

Během děje, kdy střela uvázne v bedničce s pískem, se zachovává celková hybnost soustavy střela a bednička. Střela se totiž pohybuje vodorovně. Mechanická energie soustavy se však nezachovává, protože se jedná o (dokonale) nepružnou srážku. Rychlost bedničky se střelou V tedy určíme ze zákona zachování hybnosti

$$mv = (m + M)V \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m}{m + M}\, v\,.$$

Zanedbali jsme hmotnost vlákna, na kterém visí bednička.

Dále se bude těžiště bedničky pohybovat po kružnici se středem v bodě závěsu vlákna. Zanedbáme-li odpor vzduchu, bude se zachovávat mechanická energie bedničky s kulkou. Nulovou hladinu potenciální energie zvolíme v nejnižším bodě trajektorie těžiště bedničky. V tomto bodě má tedy bednička mechanickou energii $\frac{1}{2}(m + M)V^2$. V nejvyšším bodě trajektorie, kdy úhel výchylky bedničky z rovnovážné polohy odpovídá amplitudě A, má bednička nulovou kinetickou energii. (Bednička se zastaví a začne se pohybovat zpět.) Podle obrázku 5 zjistíme, že výška těžiště bedničky vzroste o $L(1 - \cos A)$. Potenciální energie v nejvyšším bodě tedy je $(m + M)gL(1 - \cos A)$. Vztah mezi amplitudou A a počáteční rychlostí V bedničky dává zákon zachování energie

$$\frac{1}{2}\,(m + M)V^2 = (m + M)gL(1 - \cos A)\,.$$

Dosadíme za rychlost V

$$\frac{1}{2}\frac{m^2}{m + M}\, v^2 = (m + M)gL(1 - \cos A)$$

a pro velikost rychlosti kulky dostáváme

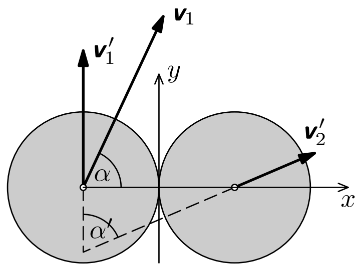
$$v = \frac{m + M}{m}\sqrt{2gL(1 - \cos A)}\,.$$

Příklad 12 – kotouče na stole

Na vzduchovém stole dojde ke srážce dvou stejných plochých kotoučů o hmotnosti m a poloměru r. Na začátku byl jeden kotouč v klidu a druhý do něj narazil rychlostí $\boldsymbol{v}_1$. Součinitel tření mezi kotoučemi je f. Jaký úhel budou svírat trajektorie kotoučů po srážce? Valivý odpor zanedbejte, srážkou kotoučů považuje za pružnou.

Řešení

Souřadnicovou soustavu zavedeme podle obrázku 6 (osa x má směr spojnice středů kotoučů, počátek soustavy je v místě dotyku kotoučů). Veličiny příslušné narážejícímu kotouči budeme značit indexem 1, veličiny příslušné kotouči, který byl v klidu, označíme indexem 2. Veličiny po srážce opatříme čárkou. Úhel mezi vektorem rychlosti $\boldsymbol{v}_1$ a osou x označíme α.



Obr. 6

Během srážky se zachovává hybnost, moment hybnosti i energie soustavy dvou kotoučů. Budeme studovat zvlášť pohyb ve směru osy x a osy y. Je to výhodné, neboť vektory normálové síly a třecí síly, které působí na kotouče během srážky, mají směr osy x a osy y.

Ve směru osy x dojde k pružné srážce kotoučů, platí tedy zákon zachování hybnosti i mechanické energie

$$mv_{1x} = mv'_{1x} + mv'_{2x}\,, \qquad \frac{1}{2}\,mv_{1x} = \frac{1}{2}\,mv'^2_{1x} + \frac{1}{2}\,mv'^2_{2x}\,.$$

Z těchto dvou rovnic najdeme x-ové souřadnice rychlostí obou kotoučů po srážce

$$v'_{1x} = 0\,, \qquad v'_{2x} = v_{1x}\,.$$

Vypočítáme ještě souřadnici normálové síly, která působila na první kotouč. Podle druhého Newtonova zákona píšeme

$$N = \frac{m\Delta v_{1x}}{\Delta t} = \frac{m(v'_{1x} - v_{1x})}{\Delta t}\,,$$

kde Δt je doba trvání srážky.

Zabývejme se nyní pohybem kotoučů ve směru osy y. Během srážky působí na kotouče třecí síla, která změní nejen jejich rychlosti, ale také je roztočí. Začneme nejjednodušší rovnicí – zákonem zachování hybnosti

$$mv_{1y} = mv'_{1y} + mv'_{2y}\,.$$

Zákon zachování momentu hybnosti vyjádříme vzhledem k ose procházející bodem dotyku kotoučů. Působiště všech sil je totiž právě v tomto bodě, moment hybnosti každého kotouče se bude vzhledem k této vybrané ose zachovávat

$$-mv_{1y}r = -mv'_{1y}r + J\omega_1\,, \qquad 0 = mv'_{2y}r + J\omega_2\,.$$

kde ω je úhlová rychlost rotace kotoučů po srážce a J je jejich moment setrvačnosti vzhledem k ose rotace (pro válec $J = mr^2/2$). Pokud se povrchy kotoučů vůči sobě pohybují, působí na první kotouč třecí síla, která má souřadnici fN. Těsně před srážkou je tečná rychlost povrchu první koule vzhledem k povrchu druhé koule v_{1y}, těsně po srážce $v'_{1y} - v'_{2y} + \omega_1 r + \omega_2 r$. Třecí síla tedy vykoná práci

$$\begin{aligned} W_\mathrm{t} &= \frac{1}{2}\, fN(v_{1y} + v'_{1y} - v'_{2y} + \omega_1 r + \omega_2 r)\Delta t = \\ &= \frac{1}{2}\, fm(v'_{1x} - v_{1x})(v_{1y} + v'_{1y} - v'_{2y} + \omega_1 r + \omega_2 r)\,. \end{aligned}$$

Zbývá napsat zákon zachování energie. Změna kinetické energie je rovna práci vykonané třecí silou

$$\frac{1}{2}\, mv_{1y}^2 + W_\mathrm{t} = \frac{1}{2}\, mv_{1y}'^2 + \frac{1}{2}\, mv_{2y}'^2 + \frac{1}{2}\, J\omega_1^2 + \frac{1}{2}\, J\omega_2^2\,.$$

Řešením uvedených rovnic dostaneme dvě řešení pro y-ové souřadnice rychlostí obou kotoučů po srážce. Fyzikálně správné vybereme podmínkou, že vzájemná tečná rychlost povrchů kotoučů musí být po srážce větší než nula (jinak by nebyl splněn předpoklad o velikosti třecí síly).

$$v'_{1y} = v_{1y} - fv_{1x}\,, \qquad v'_{2y} = fv_{1x} \qquad \text{pro } \operatorname{tg}\alpha \geq 6f.$$

Pro $\operatorname{tg}\alpha < 6f$ řešení neexistuje. Pro takové úhly se totiž během srážky stihnou tečné rychlosti povrchů kotoučů vyrovnat. Jistý časový úsek srážky tedy již nedochází ke smýkání povrchů po sobě, ale k odvalování bez prokluzu, kdy třecí síla nekoná práci. Zákon zachování energie nahradíme rovnicí

$$v'_{1y} - v'_{2y} + \omega_1 r + \omega_2 r = 0\,.$$

Řešením bude

$$v'_{1y} = \frac{5}{6}\, v_{1y}\,, \qquad v'_{2y} = \frac{1}{6}\, v_{1y} \qquad \text{pro } \operatorname{tg}\alpha < 6f.$$

První kotouč se bude po srážce pohybovat ve směru osy y. Úhel mezi trajektoriemi po srážce je roven úhlu mezi vektory rychlosti kotoučů po srážce, tj. vztahem

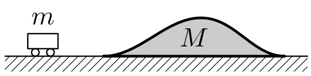
$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha' &= \frac{v'_{2x}}{v'_{2y}} = \frac{v_{1x}}{fv_{1x}} = \frac{1}{f} && \text{pro } \operatorname{tg}\alpha \geq 6f, \\ \operatorname{tg}\alpha' &= \frac{v'_{2x}}{v'_{2y}} = \frac{6v_{1x}}{v_{1y}} = \frac{6}{\operatorname{tg}\alpha} && \text{pro } 0 < \operatorname{tg}\alpha < 6f. \end{aligned}$$

Pokud rotaci těles neuvažujeme či je koeficient tření f roven nule, je výsledek jednoduchý $\alpha' = 90°$. Pro $\alpha = 0°$ zůstane první koule stát, $\boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_1$.

Příklad 13 – zdolání kopečku

Vozíček o hmotnosti m jede rychlostí v po rovině, na níž leží dřevěný „kopeček" o hmotnosti M a výšce h, jenž po rovině klouže bez tření (viz obr. 7). Vozíček na kopeček najede. Valivý odpor vozíčku zanedbejte.

a) Za jakých podmínek se mu podaří přejet přes vrchol?
b) Jakou rychlostí se bude kopeček nakonec pohybovat?



Obr. 7

Řešení

Jelikož není nijak specifikováno, jak vypadá kopeček, je zřejmé, že zkoumat tuto úlohu pomocí účinků sil by asi nikam nevedlo nebo by to bylo zbytečně komplikované. Úlohu budeme zkoumat z hlediska energie a hybnosti. Pro platnost zákona zachování mechanické energie nebudeme uvažovat žádné odporové síly, což je v souladu se zadáním. Dále je třeba, aby se vozíček během své cesty nevznesl nad povrch kopečku.

Vztažnou soustavu volíme pevně spojenou s podložkou, kladný směr rychlosti volíme tak, že vozíček má na počátku kladnou rychlost.

a) Pro stanovení velikosti kritické počáteční rychlosti v_k vozíčku (minimální počáteční rychlosti takové, aby vozíček kopeček přejel) budeme předpokládat, že kopeček má jediný vrcholek, a tedy po zdolání tohoto vrcholku je již jisté, že vozíček kopeček přejede. Jelikož kopeček volně klouže po podložce, bude mít vozíček při překonávání vrcholku v mezním případě stejnou rychlost jako kopeček, tuto společnou rychlost si označíme V_k. Díky předpokladům platí zákon zachování mechanické energie a zákon zachování hybnosti

$$\frac{1}{2}\,mv_\mathrm{k}^2 = \frac{1}{2}\,(m+M)V_\mathrm{k}^2 + mgh\,,$$

$$mv_\mathrm{k} = (m+M)V_\mathrm{k}\,.$$

Vyloučením V_k dostaneme

$$v_\mathrm{k}^2 = \frac{m+M}{M}\,gh\,,$$

čímž jsme získali kritickou velikost počáteční rychlosti vozíčku pro dostání se na vrcholek.

b) Nyní pojďme zkoumat, jakou rychlostí se bude kopeček pohybovat poté, co z něj vozíček sjede. Opět využijeme zákon zachování mechanické energie a zákon zachování hybnosti, tedy

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mw^2 + \frac{1}{2}MV^2\,,$$

$$mv = mw + MV\,,$$

kde w je rychlost vozíčku po opuštění kopečku a V je konečná rychlost kopečku. Po vyloučení w získáme rovnici

$$\frac{M}{m}V\left(\frac{m+M}{m}V - 2v\right) = 0\,,$$

která má dvě řešení pro V

$$V_1 = 0\,,\qquad V_2 = \frac{2m}{m+M}\,v\,.$$

Jak ukážeme dál, první řešení odpovídá situaci, kdy vozíček kopeček překoná a dál pokračuje stejnou rychlostí jako na počátku, a druhé řešení odpovídá situaci, kdy vozíček kopeček nepřekoná.

Pokud tedy budeme uvažovat rychlost kopečku V_2 a vyjádříme si rychlost vozíčku w, získáme

$$w = \frac{m-M}{m}\,v\,,$$

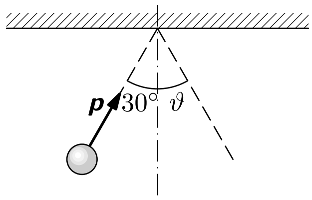
ekvivalentními úpravami vztahů pro w a V_2 lze snadno dokázat, že $V_2 > w$, což vzhledem k povaze úlohy znamená, že kopeček je „před“ vozíčkem a stále se mu vzdaluje, neboli že vozíček kopeček nepřekonal.

Vozíček tedy musí jet alespoň rychlostí v_{k}, a pokud překoná kopeček, tak kopeček nakonec zůstane stát v klidu, ale bude posunut oproti své původní poloze.

6 Úlohy

1. Odraz koule od stěny

Kulečníková koule narazila do okraje kulečníkového stolu. Při srážce změnila složka hybnosti kolmá na okraj stolu znaménko. Určete úhel ϑ odrazu koule, je-li úhel dopadu $30°$. Rotaci neuvažujte.



Obr. 8: K úloze 1

2. Běžec na plošinovém voze

Plošinový železniční vůz o hmotnosti M se může pohybovat bez valivého odporu po přímé vodorovné trati. Na voze stojí člověk o hmotnosti m. Soustava se pohybuje rychlostí o velikosti v_0. Jak se změní rychlost vozu, poběží-li člověk rychlostí velikosti v_{rel} vzhledem k vozu

a) opačným směrem než se pohybuje vůz?
b) stejným směrem jako se pohybuje vůz?

3. Dívka na kolotoči

Děvče o hmotnosti m stojí na obvodu kolotoče o poloměru R a momentu setrvačnosti J. Kolotoč se může otáčet bez tření kolem svislé osy, na počátku je však v klidu. Dívka odhodí kámen o hmotnosti m' rychlostí o velikosti v tečným směrem k obvodu kolotoče.

a) Jaká bude úhlová rychlost kolotoče?
b) Vypočítejte obvodovou rychlost děvčete na kolotoči.

4. Globální oteplování

Většina vědců věří, že působením lidskou činností produkovaných skleníkových plynů a aerosolů dochází ke zvyšování průměrné teploty na Zemi a odtávání ledu v polárních oblastech. Kdyby se veškerý led z polárních čepiček rozpustil a voda se vrátila do světových oceánů, zvedla by se jejich hladina asi o 30 m.

a) Jaký vliv by měla tato změna na rotaci Země?

b) Odhadněte, jak by se změnila délka dne.

5. Meteorit

Dne 10. srpna 1972 proletěl atmosférou nad východním územím USA a Kanady velký meteorit. Odrážel se od horní vrstvy atmosféry, ohnivá koule byla na obloze tak jasná, že byla vidět i ve dne. Hmotnost meteoritu byla asi $4 \cdot 10^6$ kg, velikost jeho rychlosti zhruba 15 km/s. Vypočtěte pokles energie meteoritu, kdyby meteorit vstoupil do atmosféry vysoké 500 km ve svislém směru a zabrzdil se kolmým dopadem na povrch Země. Vyjádřete tuto energii pomocí energie uvolněné při výbuchu nukleární bomby svržené na Hirošimu, která byla $5{,}4 \cdot 10^{13}$ J.

6. Záchrana astronauta

Helikoptéra zvedala 72 kg astronauta na laně z hladiny oceánu do výšky 15 m se zrychlením $g/10$. Určete práci, kterou při tom vykonaly síly působící na astronauta. Jakou rychlost astronaut získal?

7. Kostka na nakloněné rovině

Kostku o hmotnosti 12 kg položíme na nakloněnou rovinu o sklonu 30° a uvolníme ji s nulovu počáteční rychlostí. Na nakloněné rovině je připevněna pružina, jejíž tuhost je $13{,}5\,\mathrm{kN \cdot m^{-1}}$. Kostka narazí na pružinu a stlačuje ji až do okamžiku, kdy je její rychlost nulová a pružina je stlačená o 5,5 cm. Součinitel smykového tření mezi kostkou a nakloněnou rovinou je 0,4.

a) Jakou dráhu urazila kostka na nakloněné rovině od okamžiku vypuštění do okamžiku maximálního stlačení pružiny?
b) S jakou rychlostí narazila do pružiny?

8. Rychlost střely

Střela o hmotnosti 0,55 kg je vystřelena s počáteční rychlostí $150\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Nejvyšší bod, kterého střela dosáhne, leží ve výšce 140 m nad ústím hlavně.

a) Jaká je vodorovná složka rychlosti střely?
b) Pod jakým úhlem je střela vystřelena?

Odpor vzduchu neuvažujte.

9. Galileovo kyvadlo

Délka vlákna kyvadla je $L = 120$ cm. Ve vzdálenosti $d = 75{,}0$ cm pod závěsem kyvadla je umístěn pevný kolík. Kuličku kyvadla zvedneme tak, aby vlákno bylo vodorovně napnuté, a potom ji upustíme.

a) Jaká je rychlost kuličky v nejnižším bodě trajektorie?
b) Jaká je rychlost kuličky v nejvyšším bodě po té, co se vlákno zachytí o kolík, za předpokladu, že vlákno zůstalo po celou dobu napnuté?
c) Formulujte podmínku mezi d a L, aby kulička oběhla pevný kolík a vlákno bylo po celou dobu napnuté.

10. Výstřel do zdi

Střela o hmotnosti 30 g letící vodorovnou rychlostí o velikosti $500\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ se zaryla 12 cm hluboko do stěny.

a) Jak se změnila její mechanická energie?
b) Jaká byla velikost průměrné brzdící síly?

11. Lyžař na svahu

Výšky dvou zasněžených protilehlých kopců nad údolím jsou 850 m a 750 m. Lyžař sjede z vyššího z nich, zamíří do protisvahu a vyjede na nižší vrcholek. Průměrný sklon obou svahů je 30°. Jaký musí být součinitel smykového tření mezi lyží a sněhem, aby se lyžař na nižším vrcholku zastavil?

12. Různé kotouče *

Vyřešte znovu příklad 12 (kotouče na stole), tentokrát pro různé hmotnosti kotoučů $m_1 \neq m_2$.

Řešte další úlohy z přechozích studijních textů [7] a [8] tentokrát pomocí zákonů zachování.

Výsledky úloh

1. Při srážce působí na kouli normálová složka stěny, která je kolmá na okraj stěny. Složka hybnosti, která je vodorovná s okrajem stolu, se zachovává. Z toho okamžitě plyne, že úhel dopadu se rovná úhlu odrazu $\vartheta = 30°$.

2. Vodorovná složka hybnosti soustavy vozu a člověka se zachovává. Velikost rychlosti vozu bude

a)
$$v' = v_0 + \frac{m}{m+M}\, v_{\mathrm{rel}}\,.$$

b)
$$v' = v_0 - \frac{m}{m+M}\, v_{\mathrm{rel}}\,.$$

3. Celkový moment hybnosti kolotoče, dívky a kamene se zachovává, i po odhození kamene zůstane nulový, neboť v rovině rotace nepůsobí žádné síly. Moment hybnosti kamene známe $m'vR$, z toho snadno určíme momenty hybnosti kolotoče a dívky a tedy také úhlovou rychlost kolotoče.

a)
$$\omega = \frac{m'vR}{mR^2 + J}\,.$$

b)
$$v_{\text{dívka}} = \omega R = \frac{m'vR^2}{mR^2+J} = \frac{v}{m/m' + J/m'R^2}\,.$$

4. Na Zemi působí pouze gravitační síla Slunce, která má však nulový moment vzhledem k ose rotace Země. Moment hybnosti rotace Země se zachovává.

a) Hmota Země se rozloží dále od osy otáčení a tak vzroste její moment setrvačnosti. Úhlová rychlost Země se tedy musí snížit.
b) Délka dne by se prodloužila řádově o sekundu.

5. Pokles potenciální energie meteoritu je

$$\Delta E_{\mathrm{p}} = \kappa\frac{mM}{R} - \kappa\frac{mM}{R+h} = 1{,}8\cdot 10^{13}\,\mathrm{J}\,,$$

kde $M = 5{,}97\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ je hmotnost Země, $R = 6378\,\mathrm{km}$ je poloměr Země, $h = 500\,\mathrm{km}$ je výška atmosféry, κ je gravitační konstanta a m je hmotnost meteoritu.

Pokles kinetické energie je

$$\Delta E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}mv^2 = 4{,}5\cdot 10^{14}\,\mathrm{J}\,.$$

Celkový pokles energie meteoritu je $4{,}7 \cdot 10^{17}\,\mathrm{J}$, což odpovídá energii asi devíti nukleárních bomb svržených na Hirošimu.

6. Lano působí na astronauta silou $mg/10 + mg$ po dráze $s = 15\,\mathrm{m}$. Vykonaná práce je

$$W = \frac{11}{10}\,mgs = 12\,\mathrm{kJ}\,.$$

Potenciální energie astronauta vzroste

$$\Delta E_\mathrm{p} = -W_\mathrm{p} = mgs = 11\,\mathrm{kJ}\,.$$

Práce tíhové síly W_p je záporná, protože tíhová síla působí proti směru pohybu astronauta. Součet obou prací je roven kinetické energii astronauta, z toho zjistíme jeho rychlost

$$v = \sqrt{\frac{1}{5}\,gs} = 5{,}4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

7. Hmotnost kostky označíme m, úhel nakloněné roviny α, tuhost pružiny k, stlačení pružiny y a součinitel smykového tření f. Využijeme zákon zachování energie.

a) Kostka urazí dráhu

$$d = \frac{ky^2}{2mg(\sin\alpha - f\cos\alpha)} = 1{,}1\,\mathrm{m}\,.$$

b) Kostka narazila na pružinu rychlostí o velikosti

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}\,y^2 + 2gyf\cos\alpha} = 1{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

8. Velikost počáteční rychlosti střely označme v_0 a výšku, které střela dosáhne, h.

a) Kinetická energie střely těsně po výstřelu je rovna součtu potenciální a kinetické energie střely v nevyšším bodě. Z této rovnice určíme kinetickou energii střely v nevyšším bodě a tedy její vodorovnou složku rychlosti v_x, protože v nejvyšším bodě se střela pohybuje vodorovně.

$$v_x = \sqrt{v_0^2 - 2gh} = 140\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

b) Hledaný úhel je roven $\alpha = \arccos{(v_x/v_0)}$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{2gh}{v_0^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 20^\circ\,.$$

9. Využijeme zákon zachování energie.

a) Rychlost kuličky v nejnižším bodě je

$$v = \sqrt{2gL} = 4{,}85\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

b) Po zachycení vlákna o kolík dosáhne kulička maximální výšky $2(L-d)$ nad nejnižším bodem.

$$v = \sqrt{2g(2d-L)} = 2{,}43\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Aby bylo vlákno napnuté, musí platit $L < 2d$.

c) Při proletnutí kuličky nejvyšším bodem zůstane vlákno stále napnuté, pokud dostředivé zrychlení kuličky je větší než tíhové zrychlení $v > \sqrt{g(L-d)}$. Z této podmínky dostaneme

$$d < L < \frac{5}{3}\,d\,.$$

10. Hmotnost střely označme m, velikost rychlosti v.

a) Změna mechanické energie odpovídá změně kinetické energie

$$\Delta E_\mathrm{k} = -\frac{1}{2}\,mv^2 = -3{,}8\,\mathrm{kJ}\,.$$

b) Změna kinetické energie se rovná práci vykonané brzdící silou, která působila na dráze d.

$$F = \frac{mv^2}{2d} = 31\,\mathrm{kN}\,.$$

11. Pokles potenciální energie lyžaře se rovná práci spotřebované třecí sílou. Označíme-li výšky kopců $h_1 > h_2$ a sklon svahu α, dostaneme

$$f = \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2}\,\operatorname{tg}\alpha = 0{,}036\,.$$

12. Úhel mezi trajektoriemi kotoučů pro $m_1 \neq m_2$ bude

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{(m_1+m_2)(\operatorname{tg}\alpha - f)}{m_1 - m_2 + f(m_1+m_2)\operatorname{tg}\alpha - 2f^2m_2} \qquad \text{pro } \operatorname{tg}\alpha \geq 6f,$$

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{15(m_1+m_2)}{18(m_1-m_2) + (3m_1+2m_2)\operatorname{tg}^2\alpha}\,\operatorname{tg}\alpha \qquad \text{pro } \operatorname{tg}\alpha < 6f.$$

Literatura

[1] Bednařík, M., Široká, M.: *Fyzika pro gymnázia – Mechanika.* 3. vydání, Prometheus, Praha 2001.

[2] Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.: *Fyzika, část 1 – Mechanika.* Vydání první, VUT Brno – nakladatelství VUTIUM, Brno 2000.

[3] Šantavý, I.: *Mechanika.* Škola mladých fyziků, SPN Praha 1993.

[4] Feynman, R., Leighton, R., Sands, M.: *Feynmannovy přednášky z fyziky 1/3.* 1. vydání, Fragment, Havlíčkův Brod 2000.

[5] Horský, J., Novotný, J., Štefaník, M.: *Mechanika ve fyzice.* Academia, Praha 2002.

[6] Šedivý, P., Volf, I.: *Práce – výkon – energie.* Knihovnička FO č. 47. MAFY, Hradec Králové 2003.

[7] Prachař, J., Trnka, J.: *Úlohy z mechaniky I.* Knihovnička FO č. 66. MAFY, Hradec Králové 2004.

[8] Prachař, J., Trnka, J.: *Úlohy z mechaniky II.* Knihovnička FO č. 72. MAFY, Hradec Králové 2005.

[9] *Ročenky Fyzikálního korespondenčního semináře Fykos z let 1994–2006.* Vyd. MFF UK, Praha 1995–2006.