

POHYB TĚLESA PO ELIPTICKÉ TRAJEKTORII V RADIÁLNÍM GRAVITAČNÍM POLI

Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

Přemysl Šedivý a Ivo Volf – ÚVFO Hradec Králové

Obsah

1	Úvod	2
2	Geometrie elipsy	4
3	Keplerovy zákony	8
4	Mechanická energie tělesa na eliptické trajektorii	11
5	Výpočet rozměrů eliptické trajektorie a doby oběhu z okamžitého pohybového stavu tělesa	14
6	Časový průběh pohybu po eliptické trajektorii. Keplerova rovnice	17
7	Modelování pohybu tělesa po eliptické trajektorii	19
	Literatura	22
	Výsledky úloh	23

1 Úvod

V nebeské mechanice často studujeme pohyby relativně malých těles v radiálním gravitačním poli osamocенého tělesa s mnohonásobně větší hmotností. Největší planeta Sluneční soustavy – Jupiter – má hmotnost 1 050krát menší než Slunce. Hmotnosti ostatních planet, planetek, komet a meteorů jsou v porovnání s hmotností Slunce zcela nepatrné. Hmotnost Měsíce je přibližně 81krát menší než hmotnost Země. Některé velké měsíce ostatních planet mají sice hmotnosti srovnatelné s Měsícem Země, ale v porovnání s hmotnostmi planet, kolem kterých obíhají, jsou také nepatrné. Umělá kosmická tělesa vyslaná do vesmíru člověkem v tomto srovnání představují jen nepatrná zrnka hmoty.

Pohyb malého tělesa v gravitačním poli osamocенého tělesa s mnohonásobně větší hmotností můžeme nejsnáze vyšetřit ve vztažné soustavě, jejíž počátek leží ve středu velkého tělesa a souřadnicové osy směřují ke vzdáleným hvězdám. Přitom dosáhneme dosti přesných výsledků, budeme-li tuto vztažnou soustavu považovat za inerciální (což ve skutečnosti není nikdy přesně splněno) a zanedbáme-li gravitační působení všech vzdálených velkých těles a jiných malých těles, která se současně nacházejí v okolí.

Velká kosmická tělesa — hvězdy a planety — mají kulový tvar. Gravitační pole v okolí takového tělesa je stejné, jako kdyby se celá jeho hmota nacházela v jeho středu. Je-li M hmotnost centrálního tělesa, m hmotnost obíhajícího malého tělesa a r jeho vzdálenost od středu centrálního tělesa (obr. 1), působí na malé těleso přitažlivá gravitační síla o velikosti

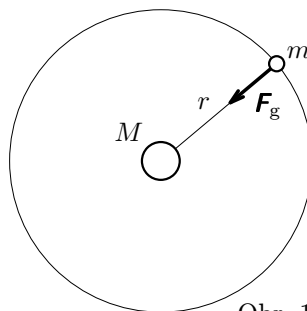
$$F_g = \varkappa \frac{Mm}{r^2}, \quad (1)$$

kde $\varkappa = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ je *gravitační konstanta*.

V prvním ročníku střední školy jste studovali pohyb v radiálním gravitačním poli, který se uskutečňoval po ideální křivce — po kružnici. Gravitační síla udělovala obíhajícímu tělesu dostředivé zrychlení a_d stálé velikosti. Z rovnosti

$$F_g = \varkappa \frac{Mm}{r^2} = ma_d = m \frac{v^2}{r} = m \frac{4\pi^2}{T^2} r \quad (2)$$

jste odvodili vztahy pro výpočet velikosti rychlosti v , doby oběhu T a poloměru



Obr. 1

trajektorie r :

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{\varkappa M}{r}}, \quad T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{\varkappa M}}, \quad r = \sqrt[3]{\frac{\varkappa M T^2}{4\pi^2}}} \quad (3)$$

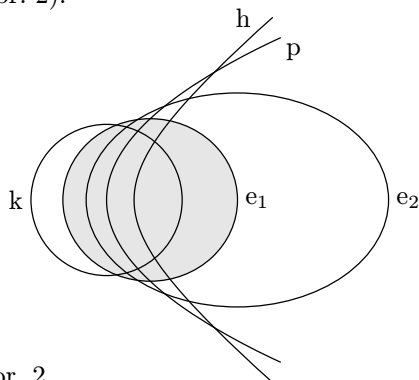
Podmínka $F_d = F_g = \textit{konst.}$ nebývá u přirozených oběžnic Slunce či planet přesně splněna a její splnění u umělých kosmických těles je obtížné, neboť to vyžaduje velkou přesnost při udělení rychlosti i při nastavení poloměru trajektorie. Proto se většina přirozených i umělých těles pohybuje kolem centrálního tělesa po jiné periodicky se opakující trajektorii — po elipse.

Úlohy

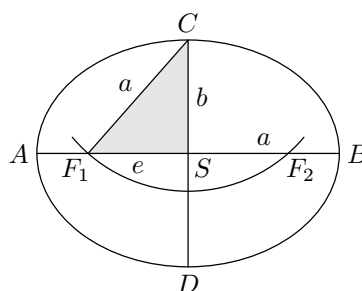
1. Mezinárodní kosmická stanice ISS se pohybuje ve výšce 380 km nad Zemí. Vypočítejte její rychlost a dobu oběhu. Zemi považujte za homogenní kouli o poloměru $R_z = 6\,370$ km a hmotnosti $M_z = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg.
2. V jaké výšce nad rovníkem se nacházejí *stacionární družice*, jejichž doba oběhu je hvězdný den $\doteq 86\,164$ s? Poloměr rovníku je 6 378 km.
3. Země se pohybuje okolo Slunce po přibližně kruhové trajektorii. Střední vzdálenost Země od Slunce je 1 AU $\doteq 1,496 \cdot 10^{11}$ m a jeden rok má přibližně $3,156 \cdot 10^7$ s. Vypočítejte z těchto údajů hmotnost Slunce.

2 Geometrie elipsy

Budete-li chtít rychle zobrazit elipsu, použijte kapesní svítilnu, jejíž světelný tok je omezen rotační kuželovou plochou. Svítíte-li kolmo na stěnu, je osvětlená plocha ohraničena kružnicí. Nakláněním osy světelného kužele dostáváme stále protáhlejší elipsy, pak v jedné poloze parabolu a potom následují hyperboly (obr. 2).



Obr. 2



Obr. 3

Zafixujte svítilnu v poloze, kdy je osvětlená plocha ohraničena elipsou, obkreslete si elipsu na papír a vystříhněte ji. Přeložením se můžete přesvědčit, že je symetrická podle dvou os AB a CD , které jsou navzájem kolmé a protínají se ve středu elipsy S (obr. 3). Delší *hlavní osa* o délce $2a$ spojuje *hlavní vrcholy* A, B , kratší *vedlejší osa* o délce $2b$ spojuje *vedlejší vrcholy* C, D . Vezmeme-li do kružítka délku hlavní poloosy a a z vedlejšího vrcholu přetneme hlavní osu, dostaneme *ohniska* elipsy F_1, F_2 . Jejich vzdálenost e od středu elipsy se nazývá *výstřednost* (*excentricita*) elipsy. Platí

$$a^2 = b^2 + e^2, \quad e = \sqrt{a^2 - b^2}. \quad (4)$$

Podíl $\varepsilon = \frac{e}{a}$ se nazývá *číselná výstřednost* (*numerická excentricita*) elipsy.

Součet vzdáleností kteréhokoliv bodu elipsy od ohnisek F_1, F_2 je roven délce hlavní osy. Z toho vychází bodová konstrukce elipsy podle obr. 4. Zvolíme-li na hlavní ose bod X_1 a sestrojíme oblouky o poloměrech $|AX_1|$ a $|BX_1|$ se středy v ohniskách elipsy, dostaneme bod X a další tři body souměrně sdružené k bodu X podle os a středu elipsy.

Zvolme počátek soustavy souřadnic ve středu elipsy a osy x a y v hlavní a vedlejší ose elipsy. Pak pro libovolný bod $X = [x, y]$ elipsy platí

$$|F_1X| + |F_2X| = \sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a.$$

Umocněním této rovnosti a algebraickou úpravou dostaneme

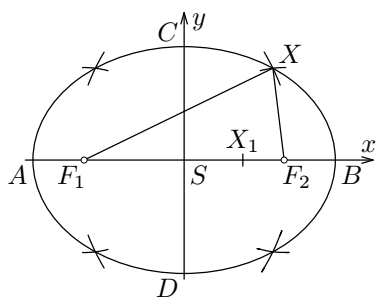
$$\sqrt{(x+e)^2+y^2}\sqrt{(x-e)^2+y^2}=2a^2-(x^2+y^2+e^2)$$

a dalším umocněním a úpravou dojdeme ke vztahu

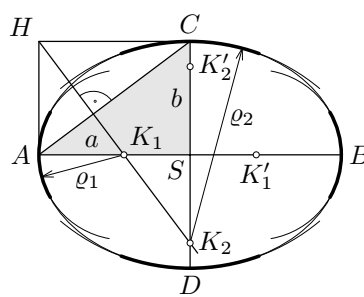
$$(a^2-e^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-e^2),$$

který můžeme upravit na *rovnici elipsy v osové poloze*:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} \quad (5)$$



Obr. 4



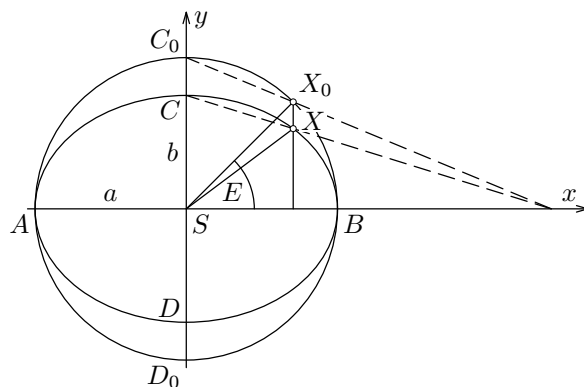
Obr. 5

Oblouky elipsy v okolí vrcholů můžeme nahradit oblouky *oskulačních kružnic*, jejichž středy K_1 , K_2 nalezneme jednoduchou konstrukcí podle obr. 5. Z podobnosti trojúhelníků $\triangle ASC \sim \triangle HAK_1 \sim \triangle K_2CH$ určíme poloměry oskulačních kružnic ϱ_1 a ϱ_2 :

$$\frac{\varrho_1}{b} = \frac{b}{a} = \frac{a}{\varrho_2}, \quad \varrho_1 = \frac{b^2}{a}, \quad \varrho_2 = \frac{a^2}{b}. \quad (6)$$

Elipsu v osové poloze můžeme získat také z kružnice o poloměru a , jestliže souřadnice y bodů zmenšíme v poměru $b : a$ (obr. 6). Zavedením *excentrické anomálie* E dojdeme k *parametrickým rovnicím elipsy v osové poloze*:

$$\boxed{x = a \cos E, \quad y = b \sin E, \quad E \in \langle 0, 2\pi \rangle.} \quad (7)$$



Obr. 6

Při popisu pohybu hmotného bodu v radiálním gravitačním poli často volíme počátek souřadnicové soustavy v ohnisku a používáme *polární souřadnice* r , φ . Zvolíme-li pól v ohnisku F_2 a polární osu F_2B podle obr. 7, platí

$$\sqrt{(2e + r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2} = 2a - r.$$

Úpravou dostaneme

$$r(a + e \cos \varphi) = a^2 - e^2 = b^2,$$

$$r = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 + \frac{e}{a} \cos \varphi} = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}.$$

(8)

Parametr p je roven poloměru ϱ_1 oskulační kružnice v hlavním vrcholu, ε je číselná výstřednost.

Úlohy

1. Narýsujte elipsu, jestliže $a = 5$ cm, $b = 3$ cm. *Návod:*

- Narýsujte osový kříž a podle obr. 3 sestrojte ohniska F_1 , F_2 .
- Podle obr. 5 nahraďte elipsu v blízkosti vrcholů oblouky oskulačních kružnic.
- Bodovou konstrukcí podle obr. 4 naleznete v každém kvadrantu několik bodů elipsy ve větší vzdálenosti od vrcholů.

- d) Propojte oblouky oskulačních kružnic přes body určené bodovou konstrukcí pomocí křivítka.
- 2.** Elipsa z předcházející úlohy je umístěna v osově poloze. Bod $X = [3 \text{ cm}, ?]$ elipsy leží v prvním kvadrantu.
- a) Vypočtěte výstřednost e a číselnou výstřednost ε elipsy.
- b) Určete excentrickou anomálii bodu X .
- 3.** Stejnou elipsu s tímž bodem X popište pomocí polárních souřadnic zavedených podle obr. 7.
- a) Napište rovnici dané elipsy v polárních souřadnicích.
- b) Určete souřadnice r a φ bodu X .

3 Keplerovy zákony

Základní poznatky o pohybu planet po eliptických trajektoriích okolo Slunce objevil *Johannes Kepler* (1571 – 1630). Formuloval tři zákony, které vyplynuly z rozboru velmi přesných záznamů o polohách planet, které prováděl po dlouhá léta dánský astronom *Tycho Brahe* (1546 – 1601). Oba se setkali v Praze ve službách císaře Rudolfa II., velkého příznivce astrologie. První a druhý zákon uveřejnil Kepler r. 1609:

Planety se pohybují okolo Slunce po elipsách málo odlišných od kružnic, v jejichž společném ohnisku je Slunce.

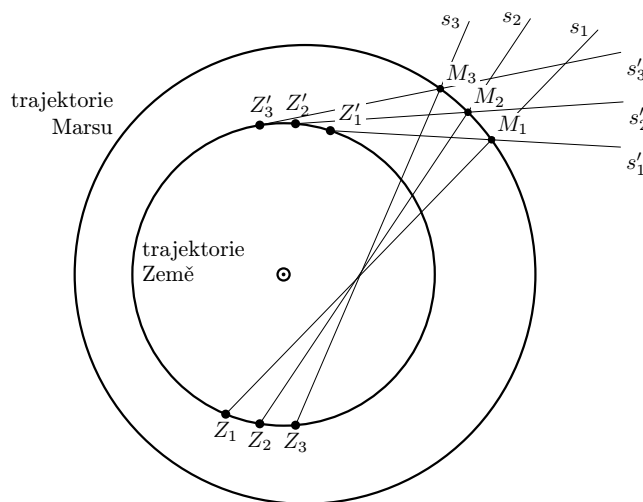
Obsahy ploch opsaných průvodičem planety za jednotku času jsou konstantní.

K nim přidal r. 1619 třetí zákon:

Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet se rovná poměru třetích mocnin velkých poloos jejich trajektorií:

$$\boxed{\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}} \quad (9)$$

Způsob, jak Kepler dospěl k uvedeným zákonům, si můžeme velmi zjednodušeně vysvětlit podle obr. 8, kde jsou v určitém měřítku zobrazeny trajektorie Země a Marsu.



Obr. 8

Trajektorie Země, Marsu i ostatních planet leží přibližně v téže rovině a všechny planety obíhají Slunce v témže směru. Země obíhá kolem Slunce s pe-

riodou $T_z = 365,24$ d a Mars s periodou T , kterou za chvíli vypočteme, průměrnými úhlovými rychlostmi

$$\omega_m = \frac{2\pi}{T}, \quad \omega_z = \frac{2\pi}{T_z}.$$

Při pozorování Marsu z pohybující se Země nemůžeme přímo určit *siderickou* (skutečnou) dobu oběhu Marsu T , ale snadno zjistíme *synodickou* dobu oběhu $T_s = 779,94$ d, tj. průměrnou dobu mezi dvěma *opozicemi* Marsu (okamžiky, kdy se Mars nachází přesně na opačné straně Země než Slunce). Pozorovateli na Zemi se pohyb Marsu jeví, jako by probíhal průměrnou úhlovou rychlostí

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = \omega_z - \omega_m = \frac{2\pi}{T_z} - \frac{2\pi}{T}. \quad (10)$$

Z toho určíme siderickou dobu oběhu Marsu jako

$$T = \frac{T_z T_s}{T_s - T_z} = 687 \text{ d} = 1,881 \text{ r}. \quad (11)$$

Zobrazme nejprve v určitém měřítku trajektorii Země, která má téměř přesně tvar kružnice, a na ni polohy Země Z_1 v čase t_1 a Z'_1 v čase $t'_1 = t_1 + kT$, kde kT je celistvý násobek periody Marsu. Zobrazme také polopřímky s_1 a s'_1 , na kterých vidíme Mars z bodů Z_1 a Z'_1 v časech t_1 a t'_1 . Protože polohy Marsu se opakují s periodou T , nachází se Mars v časech t_1 a t'_1 v tomtéž bodě M_1 , který nalezneme jako průsečík polopřímek s_1 a s'_1 . Opakováním popsané konstrukce pro další dvojice časů $t_2, t'_2; t_3, t'_3 \dots$ můžeme postupně vymodelovat celou trajektorii Marsu.

Popsaným způsobem vyšetřil Kepler pohyby všech tehdy známých planet a odhalil výše uvedené zákony. Znal ovšem jen poměrné velikosti eliptických trajektorií. Jejich skutečné rozměry bylo možno vypočítat až po r. 1672, kdy *Cassini* trigonometrickým měřením určil vzdálenost Země a Marsu.

Keplerovy zákony popisují, *jak* se pohybují planety, ale nevysvětlují, *proč* se tak pohybují. Tento problém vyřešil až *Isaac Newton* (1642–1727), který objevil gravitační zákon, sestavil pohybovou rovnici hmotného bodu v radiálním gravitačním poli a jejím řešením Keplerovy zákony odvodil.

Vraťme se nyní k prvním dvěma Keplerovým zákonům. Obsah plochy ΔS opsané průvodičem planety za krátkou dobu Δt určíme jako obsah trojúhelníka určeného průvodičem $\mathbf{r}$ a vektorem $\mathbf{v}\Delta t$, kde $\mathbf{v}$ je okamžitá rychlost planety (obr. 9). Jestliže oba vektory svírají úhel α , platí

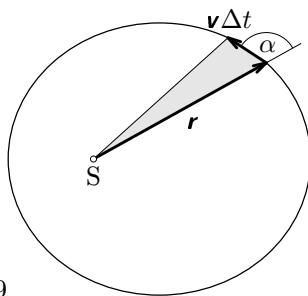
$$\Delta S = \frac{1}{2}rv\Delta t \sin \alpha.$$

Podíl

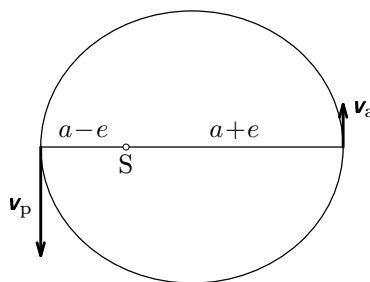
$$w = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{rv \sin \alpha}{2} \quad (12)$$

udává obsah plochy opsané průvodičem za jednotku času a nazýváme jej *plošná rychlost* planety. Podle 2. Keplerova zákona je pro danou planetu konstantní. Pohybuje-li se planeta po eliptické trajektorii s délkou hlavní poloosy a a excentricitou e , délka průvodiče i úhel α se mění. Proto se mění i velikost okamžité rychlosti planety. Největší je rychlost v_p v *periheliu*, kdy je vzdálenost planety od Slunce $r_p = a - e$, a nejmenší v *aféliu*, kdy platí $r_a = a + e$. V obou případech je $\alpha = 90^\circ$ (obr. 10).

Z rovnosti $\frac{1}{2}v_p r_p = \frac{1}{2}v_a r_a$ plyne $\frac{v_p}{v_a} = \frac{r_a}{r_p} = \frac{a+e}{a-e}$. (13)



Obr. 9



Obr. 10

Keplerovy zákony platí nejen pro pohyb planet a dalších těles — planetek, komet, meteorů — okolo Slunce, ale i pro pohyb měsíců a družic v blízkosti planet, kdy ovšem roli centrálního tělesa přebírá daná planeta.

Úlohy

- Oběžná doba Marsu je $T = 1,881$ r a číselná výstřednost jeho trajektorie $\varepsilon = 0,093\,39$.
 - Určete délky poloos jeho trajektorie.
 - Určete vzdálenosti Marsu od Slunce v periheliu a aféliu.
 - Určete poměr rychlostí Marsu v periheliu a aféliu.
- Trajektorie Pluta má délku velké poloosy $a = 39,5$ AU a značnou číselnou výstřednost $\varepsilon = 0,248$. Trajektorie Neptuna má přibližně tvar kružnice o poloměru 30,1 AU. Vypočítejte vzdálenost Pluta od Slunce v periheliu a porovnejte ji s poloměrem trajektorie Neptuna.

3. Trajektorie planetky Apollo má délku hlavní poloosy $a = 1,471$ AU a číselnou výstřednost $\varepsilon = 0,560$.

a) Určete dobu oběhu a vzdálenosti od Slunce v periheliu a aféliu.

b) Určete velikost vedlejší poloosy trajektorie a do společného obrázku v měřítku $1 \text{ AU} \hat{=} 5 \text{ cm}$ zakreslete trajektorii Země jako kružnici o poloměru 1 AU a trajektorii planetky.

(Obě křivky na obrázku se sice protínají, ale rovina skutečné trajektorie planetky Apollo je od roviny ekliptiky odchýlena o $6,35^\circ$ a planetka proto Zemi nemůže zasáhnout.)

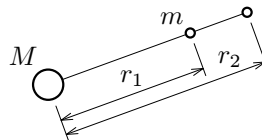
4 Mechanická energie tělesa na eliptické trajektorii

Při pohybu hmotného bodu po eliptické trajektorii se mění jeho okamžitá rychlost i vzdálenost od středu centrálního tělesa. Mění se tedy i jeho kinetická a potenciální energie, ale celková mechanická energie zůstává konstantní. Vztah pro výpočet kinetické energie známe:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2,$$

kde za v dosazujeme velikost okamžité rychlosti. Vztah pro výpočet *gravitační potenciální energie* E_{pg} tělesa o hmotnosti m v radiálním gravitačním poli tělesa o hmotnosti M nyní odvodíme.

Práce, kterou musíme vykonat, abychom těleso o hmotnosti m posunuli ve směru průvodiče ze vzdálenosti r_1 od středu centrálního tělesa do vzdálenosti r_2 (obr. 11), je rovna přírůstku jeho gravitační potenciální energie



Obr.11

$$W_{12} = E_{pg2} - E_{pg1} = F_p(r_2 - r_1), \quad (14)$$

kde F_p je velikost průměrné síly, kterou musíme působit:

$$F_1 = \kappa \frac{Mm}{r_1^2}, \quad F_2 = \kappa \frac{Mm}{r_2^2}, \quad F_p = \sqrt{F_1 F_2} = \kappa \frac{Mm}{r_1 r_2}.$$

Po dosazení

$$E_{\text{pg}2} - E_{\text{pg}1} = \varkappa \frac{Mm}{r_1 r_2} (r_2 - r_1) = \varkappa \frac{Mm}{r_1} - \varkappa \frac{Mm}{r_2} = -\varkappa \frac{Mm}{r_2} - \left(-\varkappa \frac{Mm}{r_1} \right).$$

Při popisu pohybů v radiálním gravitačním poli je výhodné zvolit potenciální energii v nekonečné vzdálenosti za nulovou. Pak je ovšem v konečné vzdálenosti záporná a platí

$$\boxed{E_{\text{pg}} = -\varkappa \frac{Mm}{r}.} \quad (15)$$

Užitím vztahu (13) a zákona zachování energie odvodíme vztah pro výpočet velikosti okamžité rychlosti v kterémkoliv bodě eliptické trajektorie. Vyjdeme ze soustavy rovnic

$$v_{\text{a}} = v_{\text{p}} \frac{a - e}{a + e} \quad (16)$$

$$\frac{1}{2} m v_{\text{p}}^2 - \varkappa \frac{Mm}{a - e} = \frac{1}{2} m v_{\text{a}}^2 - \varkappa \frac{Mm}{a + e} \quad (17)$$

$$\frac{1}{2} m v^2 - \varkappa \frac{Mm}{r} = \frac{1}{2} m v_{\text{p}}^2 - \varkappa \frac{Mm}{a - e} \quad (18)$$

Dosazením z (16) do (17) a úpravou dostaneme

$$v_{\text{p}} = \sqrt{\frac{\varkappa M}{a} \frac{a + e}{a - e}} \quad (19)$$

a po dosazení do (18) a příslušných úpravách

$$\boxed{v = \sqrt{\varkappa M \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}.} \quad (20)$$

Pomocí vztahu (19) můžeme vyjádřit plošnou rychlost jako

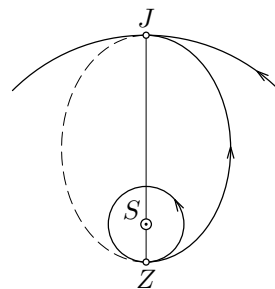
$$w = \frac{1}{2} r_{\text{p}} v_{\text{p}} = \frac{a - e}{2} \sqrt{\frac{\varkappa M}{a} \frac{a + e}{a - e}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varkappa M}{a} (a^2 - e^2)},$$

$$\boxed{w = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{\varkappa M}{a}}} \quad (21)$$

Úlohy

1. Jak velkou práci musejí vykonat motory rakety, aby vynesly družici o hmotnosti 1 500 kg do výšky 630 km a udělily jí rychlost potřebnou pro pohyb po trajektorii tvaru kružnice?
2. Určete gravitační potenciální energii tělesa o hmotnosti 1 kg, které se nachází na povrchu Země. Uvažujte jen gravitační pole Země a energii považujte za nulovou pro $r \rightarrow \infty$.
3. Jakou počáteční rychlost bychom museli udělit tělesu v těsné blízkosti Země, aby se trvale vzdálilo z dosahu jejího gravitačního působení?
4. Halleyova kometa prolétla naposled okolo Slunce r. 1986 a vrátí se opět za 76,1 r. V periheliu byla od Slunce vzdálena 0,587 AU. Určete rychlost komety v periheliu, plošnou rychlost a obsah plochy omezené její trajektorií.

5. Při letu kosmické sondy k jiným planetám můžeme téměř po celou dobu letu zanedbat gravitační působení planet a přihlížet jen ke gravitačnímu působení Slunce. Energeticky nejvýhodnější je tzv. *Hohmannova trajektorie*, která se dotýká trajektorie Země v místě startu a trajektorie planety v místě přistání. Tato místa musí ležet na opačných stranách od Slunce. Na obr. 12 je znázorněna Hohmannova trajektorie pro let ze Země na Jupiter.



Obr. 12

- a) Určete dobu letu.
- b) Určete rychlost sondy po opuštění oblasti, kde převládá gravitační působení Země, a před vstupem do oblasti, kde převládá gravitační působení Jupitera.
- c) Porovnejte rychlosti určené v úkolu b) s rychlostmi Země a Jupitera.

Trajektorie Země a Jupitera považujte za kružnice o poloměrech 1 AU a 5,2 AU. Doba oběhu Jupitera je 11,86 r.

5 Výpočet rozměrů eliptické trajektorie a doby oběhu z okamžitého pohybového stavu tělesa

V okolí *pericentra* (perihelia, perigea, ...) probíhá pohyb tělesa jako rovnoměrný pohyb po oskulační kružnici o poloměru ϱ_1 , způsobený dostředivou gravitační silou F_g (obr. 12). Má přitom plošnou rychlost

$$w = \frac{v_p r_p}{2}.$$

Z (1), (4) a (6) plyne

$$F_g = \frac{\varkappa M m}{r_p^2} = m a_d = \frac{m v_p^2}{\varrho_1} = \frac{m v_p^2 a}{b^2},$$

$$b^2 = a \frac{v_p^2 r_p^2}{\varkappa M} = a^2 - e^2 = a^2 - (a - r_p)^2 = 2 a r_p - r_p^2.$$

Úpravou dostaneme

$$a = \frac{r_p^2}{2 r_p - \frac{v_p^2 r_p^2}{\varkappa M}} = \frac{\varkappa M}{2 \left(\frac{\varkappa M}{r_p} - \frac{v_p^2}{2} \right)},$$

$$b^2 = \frac{a}{\varkappa M} v_p^2 r_p^2 = \frac{4 w^2}{2 \left(\frac{\varkappa M}{r_p} - \frac{v_p^2}{2} \right)}.$$

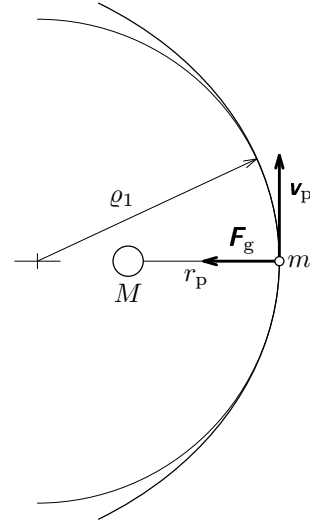
Zavedme substituci

$$D = \frac{v_p^2}{2} - \frac{\varkappa M}{r_p}.$$

Výraz D má jednoduchý fyzikální význam, který odhalíme jeho úpravou na tvar

$$D = \frac{\frac{1}{2} m v_p^2 - \frac{\varkappa M m}{r_p}}{m}.$$

Je to celková mechanická energie obíhajícího tělesa při jeho průletu pericentrem dělená jeho hmotností, tedy *měrná mechanická energie*. Podle zákona zachování energie se ovšem celková mechanická energie během obíhání nemění a můžeme ji vypočítat z polohy a okamžité rychlosti v kterémkoliv bodě trajektorie. Z odvození je také zřejmé, že při pohybu po eliptické trajektorii je



Obr. 12

celková mechanická energie obíhajícího tělesa *záporná* (jinak by vyšlo $a < 0$).

Také plošná rychlost w je během pohybu konstantní a můžeme ji vypočítat v kterémkoliv bodě trajektorie podle vztahu (12). Známe-li tedy v některém okamžiku vzdálenost r obíhajícího tělesa od centrálního tělesa, velikost okamžité rychlosti v a úhel α , který svírají vektory $\mathbf{r}$ a $\mathbf{v}$, můžeme vypočítat délky poloos eliptické trajektorie pomocí vztahů

$$a = \frac{\kappa M}{-2D}, \quad b = w \sqrt{\frac{2}{-D}}, \quad \text{kde} \quad D = \frac{v^2}{2} - \frac{\kappa M}{r}, \quad w = \frac{vr \sin \alpha}{2}. \quad (22)$$

Dobu oběhu vypočítáme, když plochu elipsy dělíme plošnou rychlostí:

$$T = \frac{\pi ab}{w} \quad (23)$$

Dosazením ze vztahu (21) dostaneme

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{\kappa M}}, \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\kappa M}, \quad (24)$$

což souhlasí se vztahem (3) pro výpočet periody tělesa na kruhové trajektorii a upřesňuje 3. Keplerův zákon (9).

Poznámka: Jestliže $D = 0$, má trajektorie tvar paraboly s parametrem

$$p = 2r_p = \frac{4w^2}{\kappa M}.$$

Jestliže $D > 0$, je trajektorií větev hyperboly, jejíž poloosy jsou

$$a = \frac{\kappa M}{2D}, \quad b = w \sqrt{\frac{2}{D}}.$$

Příklad 1

Meteor se pohybuje ve vzdálenosti 2,2 AU od Slunce rychlostí o velikosti $12,5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, jejíž směr je odchýlen od směru průvodiče o 55° . Určete rozměry trajektorie a dobu oběhu. Do společného obrázku nakreslete dráhu Země a okamžitou polohu meteoru. Pak dokreslete trajektorii meteoru.

Řešení

Dosažením do vztahů (22) a (23) postupně vypočítáme

$$\begin{aligned} D &= -3,25 \cdot 10^8 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}, & w &= 1,685 \cdot 10^{15} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}, \\ a &= 2,04 \cdot 10^{11} \text{ m} = 1,364 \text{ AU}, & b &= 1,32 \cdot 10^{11} \text{ m} = 0,883 \text{ AU}, \\ T &= 5,03 \cdot 10^7 \text{ s} = 582 \text{ d}. \end{aligned}$$

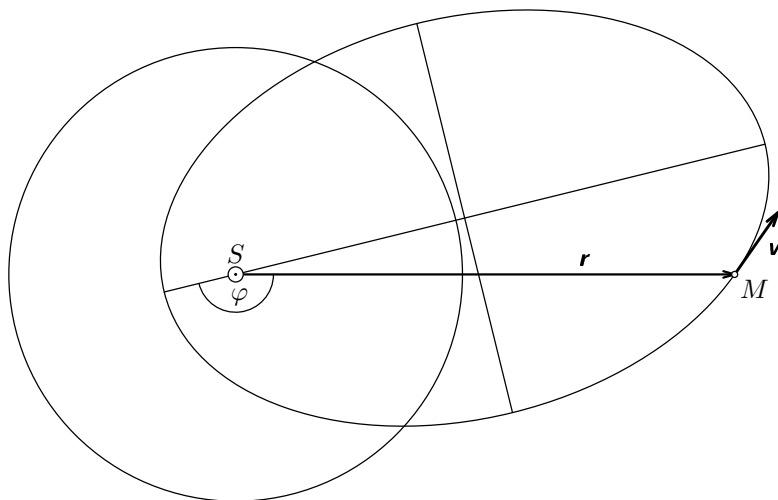
Výstřednost a číselná výstřednost trajektorie mají hodnoty

$$e = 1,56 \cdot 10^{11} \text{ m} = 1,04 \text{ AU}, \quad \varepsilon = 0,762.$$

Pomocí vztahu (8) určíme okamžitý úhel φ , který svírá průvodič meteoru s polopřímkou Slunce – perihelium. Platí

$$\cos \varphi = \frac{\frac{p}{r} - 1}{\varepsilon} = \frac{\frac{b^2}{ar} - 1}{\frac{e}{a}} = \frac{b^2 - ar}{er} = -0,97109, \quad \varphi = 166,2^\circ.$$

Pro zobrazení trajektorií na obr. 13 bylo použito měřítko $1 \text{ AU} \hat{=} 3 \text{ cm}$.



Obr. 13

Úloha

Družici Země byla ve výšce 200 km udělena kolmo k průvodiči rychlost o velikosti $8\,500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Vypočtěte rozměry její trajektorie a dobu oběhu.

6 Časový průběh pohybu po eliptické trajektorii. Keplerova rovnice

Zvolme vztažnou soustavu tak, aby počátek ležel ve středu centrálního tělesa, tedy v ohnisku trajektorie, a kladná poloosa x aby procházela pericentrem (obr. 14). Za dobu t od průchodu pericentrem vyplní průvodič tělesa část elipsy omezenou obloukem PX a úsečkami XF a FP . Tento obrazec můžeme získat oddělením trojúhelníka SFX_0 od kruhové výseče SPX_0 a zmenšením zbytku ve směru osy y v poměru $b : a$. Obsah plochy opsané průvodičem za dobu t můžeme za pomoci vztahu (21) vyjádřit pomocí excentrické anomálie E bodu X jako

$$S = wt = \frac{bt}{2} \sqrt{\frac{\varkappa M}{a}} = \left(\frac{a^2 E}{2} - \frac{ae \sin E}{2} \right) \frac{b}{a} = \frac{ab}{2} E - \frac{be}{2} \sin E.$$

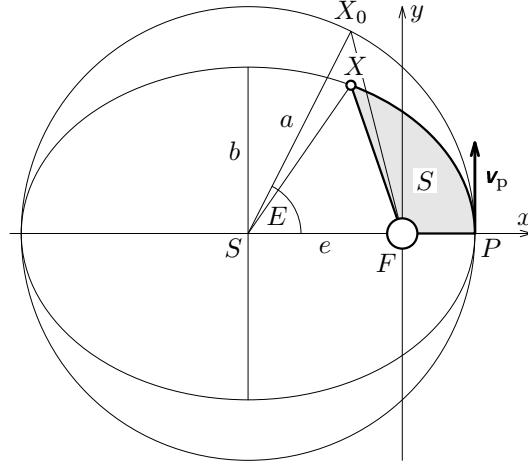
(E udáváme v radiánech.) Vynásobíme-li vztah výrazem $\frac{2}{ab}$, dostaneme *Keplerovu rovnici*

$$(\varkappa M)^{0,5} a^{-1,5} t = E - \frac{e}{a} \sin E, \quad (25)$$

neboli

$$\boxed{E - \varepsilon \sin E - Qt = 0}, \quad (26)$$

kde ε je numerická excentricita trajektorie a $Q = (\varkappa M)^{0,5} a^{-1,5}$.



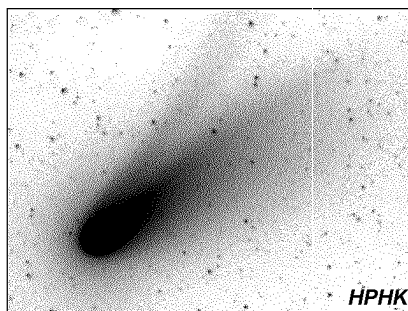
Obr. 14

Keplerovou rovnici je excentrická anomálie určena *implicitně* a pro dané t ji musíme vypočítat některou z přibližných numerických metod (viz studijní text [1]). Pro $t \in (0, T)$ je výraz Qt v intervalu $(0, 2\pi)$ a také E je v intervalu $(0, 2\pi)$. Známe-li E , vypočítáme souřadnice bodu X v čase t pomocí vztahů

$$\boxed{x = a \cos E - e, \quad y = b \sin E.} \quad (27)$$

Příklad 2

Kometa Hale–Bopp (obr. 15) objevená 23. 7. 1995 prolétla 1. 4. 1997 periheliem ve vzdálenosti 0,9141 AU od Slunce. Hlavní poloosa její trajektorie měří 187,8 AU. V jaké vzdálenosti od Slunce se nacházela v době objevení a jakou rychlostí se přitom pohybovala?



Obr. 15

Řešení

Nejprve vypočítáme číselnou výstřednost a délku vedlejší polose trajektorie.

$$e = a - r_p \doteq 186,9 \text{ AU}, \quad \varepsilon = \frac{e}{a} = 0,99513, \quad b = \sqrt{a^2 - e^2} = 18,51 \text{ AU}.$$

Od objevení komety do průletu periheliem uplynulo 618 d = $5,34 \cdot 10^7$ s. Tento čas a hodnoty $a = 2,809 \cdot 10^{13}$ m, $M = 1,99 \cdot 10^{30}$ kg dosadíme do Keplerovy rovnice a upravíme ji na tvar

$$E - 0,99513 \sin E - 0,0041322 = 0.$$

Numerickým řešením dojdeme ke kořenu $E = 0,259$ rad a dosazením do vztahů (27) dostaneme souřadnice místa, kde se kometa nacházela v době jejího objevení.

$$x \doteq -8,00 \cdot 10^{11} \text{ m} = -5,35 \text{ AU}, \quad y \doteq 7,09 \cdot 10^{11} \text{ m} = 4,74 \text{ AU}.$$

Z toho určíme vzdálenost komety od Slunce. Velikost rychlosti komety v místě objevení vypočítáme pomocí vztahu (20).

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \doteq 1,07 \cdot 10^{12} \text{ m} = 7,15 \text{ AU}, \quad v = 16 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Úloha

Za jakou dobu od průletu periheliem se bude kometa z příkladu 2 nacházet ve vedlejším vrcholu trajektorie?

7 Modelování pohybu tělesa po eliptické trajektorii

Model pohybu tělesa po eliptické trajektorii můžeme vytvořit tak, že pro aritmetickou posloupnost časů $\{t_i\}$ s počáteční hodnotou 0 a zvolenou diferencí (časovým krokem) h , tj. pro $\{t_i\} = 0, h, 2h, 3h, \dots$ vypočítáme polohy tělesa řešením Keplerovy rovnice a ve vhodném měřítku je zobrazíme.

Příklad 3

Řešením Keplerovy rovnice modelujte pohyb družice Země, jejíž perigeum je ve vzdálenosti 6 700 km od zemského středu a rychlost v perigeu má velikost $9\,000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Zvolte časový krok 60 s.

Řešení v systému FAMULUS

- Program výpočtu:

```
- - - - - proměnné, konstanty, procedury a funkce - - - - -
m=6e24          ! hmotnost Země
km=m*6.67e-11   ! hmotnost Země vynásobená gravitační konstantou
h=60            ! časový krok
- - - - - počáteční hodnoty - - - - -
t=0
x=6.7e6; y=0     ! počáteční souřadnice družice
v=9000           ! počáteční rychlost

SetMark4(1,3); Disp4(1,0,0,6.37e6,6.37e6) ! vykreslení Země

A=x/(2-v^2*x/km) ! výpočet parametrů trajektorie a doby oběhu
ex=A-x; ce=ex/A
B=sqrt(A^2-ex^2)
T=2*pi*A*B/v/x

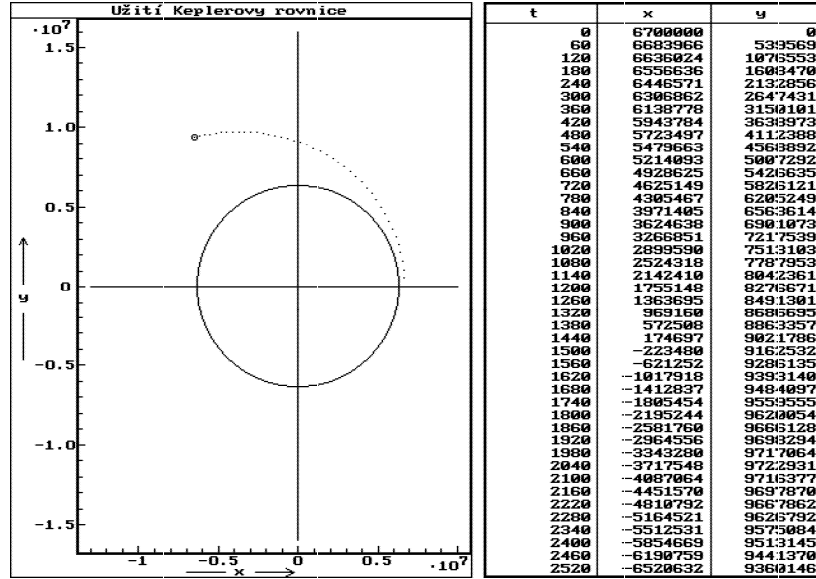
Q=sqrt(km)*A^-1.5
DISP
- - - - - model - - - - -
t=t+h
E0=0; E1=10;          ! řešení Keplerovy rovnice
LOOP                  ! metodou půlení intervalu
  E2=E0/2+E1/2;
  f=E2-ce*sin(E2)-Q*t
  IF abs(f)<1e-6 THEN E=E2; EXIT END
```

```

IF f<0 THEN E0=E2;
ELSE E1=E2 END
END
x=A*cos(E)-ex
y=B*sin(E)

```

• Model:



Častěji se setkáváme s modelováním pohybů v gravitačním poli *numeric-
kými metodami*, které vycházejí pouze z pohybové rovnice $\mathbf{F}_g = m\mathbf{a}$, a ze
základních kinematických vztahů $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{a}\Delta t$, $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{v}\Delta t$. Chceme-li pro
aritmetickou posloupnost časů $\{t_i\} = 0, h, 2h, 3h, \dots$ určit posloupnost polo-
hových vektorů $\{\mathbf{r}_i\}$, vyjdeme z počáteční polohy $\mathbf{r}_0$ a počáteční rychlosti $\mathbf{v}_0$ a
opakovane použijeme rekurentní vztahy

$$\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i + \mathbf{a}_i \cdot h, \quad \mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i \cdot h,$$

kde

$$\mathbf{a}_i = \frac{\mathbf{F}_{gi}}{m} = -\frac{\kappa M}{r_i^3} \mathbf{r}_i;$$

Příklad 4

Předcházející příklad řešte numerickým modelováním.

Řešení v systému FAMULUS

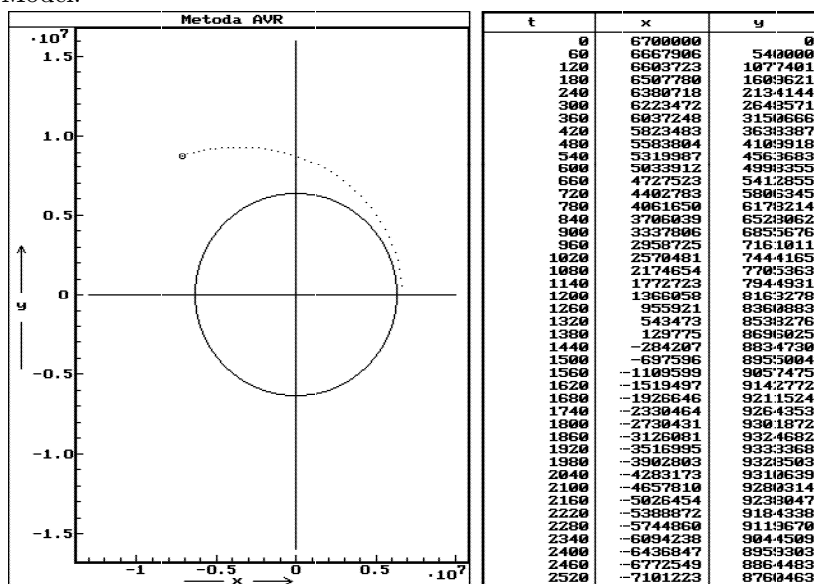
- Program výpočtu:

```

- - - - - proměnné, konstanty, procedury a funkce - - - - -
m=6e24          ! hmotnost Země
km=m*6.67e-11 ! hmotnost Země vynásobená gravitační konstantou
h=60            ! časový krok
- - - - - počáteční hodnoty - - - - -
t=0; x=6.7e6; y=0; vx=0; vy=9000
DISP
SetMark4(1,3); Disp4(1,0,0,6.37e6,6.37e6) ! vykreslení Země
- - - - - model - - - - -
f=-km/(x^2+y^2)^1.5; ax=f*x; ay=f*y ! cyklický výpočet
vx=vx+ax*h; vy=vy+ay*h
x=x+vx*h; y=y+vy*h
t=t+h

```

- Model:



Jednoduchá numerická metoda, jakou jsme právě použili, vede k modelu, který sice dobře vystihuje charakter sledovaného pohybu, ale je dosti nepřesný.

Přesnost výpočtu bychom mohli zvětšit zkrácením časového kroku, čímž se ovšem prodlužuje doba výpočtu, nebo volbou přesnější numerické metody. Podrobněji se modelováním pohybů numerickými metodami zabývá studijní text [2].

Úloha

Modelujte pohyb Halleyovy komety v období okolo průletu periheliem. Zvolte časový krok 1 týden. Do téhož obrázku znázorněte pro srovnání trajektorii Země.

Literatura

- [1] Šedivý, P.: *Užití numerických metod při řešení rovnic ve fyzikálních úlohách*. Studijní text 35. ročníku FO
- [2] Šedivý, P.: *Modelování pohybů numerickými metodami*. Knihovnička fyzikální olympiády č. 38, MAFY, Hradec Králové 1999
- [3] Ungermann, Z., Volf, I.: *Pohyb tělesa v radiálním gravitačním poli*. Škola mladých fyziků, SPN, Praha 1985
- [4] Volf, I.: *Pohyb umělých družic*. Škola mladých fyziků, SPN, Praha 1974
- [5] Lepil, O., Grün, M., Šedivý, P.: *Fyzika a technika*. SPN, Praha 1984

Výsledky úloh

1.1. $v = 7\,700 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $T = 5\,500 \text{ s}$. **1.2.** $r = 42\,230 \text{ km}$, $h = 35\,850 \text{ km}$.

1.3. $M = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$.

2.2. $e = 4 \text{ cm}$, $\varepsilon = 0,8$; $y = 2,4 \text{ cm}$, $E = \arcsin \frac{y}{b} = 53,13^\circ = 0,927 \text{ rad}$.

2.3. $r = \frac{1,8 \text{ cm}}{1 + 0,8 \cos \varphi}$; $x = -1 \text{ cm}$, $y = 2,4 \text{ cm}$, $r = 2,6 \text{ cm}$,

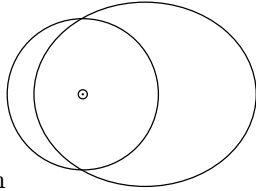
$$\cos \varphi = \frac{\frac{p}{r} - 1}{\varepsilon} = -0,3846, \quad \varphi = 112^\circ = 1,966 \text{ rad}.$$

3.1. $a = 1 \text{ AU} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{T}{T_{\text{r}}}\right)^2} = 1,524 \text{ AU}$, $e = 0,142 \text{ AU}$;

$$r_{\text{p}} = 1,3815 \text{ AU}, \quad r_{\text{a}} = 1,6661 \text{ AU}, \quad \frac{v_{\text{p}}}{v_{\text{a}}} = 1,206.$$

3.2. $r_{\text{p}} = a(1 - \varepsilon) = 29,7 \text{ AU}$.

3.3. $T = 1,78 \text{ r}$, $r_{\text{p}} = 0,647 \text{ AU}$, $r_{\text{a}} = 2,295 \text{ AU}$; $b = 1,219 \text{ AU}$.



$$1 \text{ AU} \hat{=} 1 \text{ cm}$$

4.1. $v = \sqrt{\frac{\kappa M}{R_z + h}} = 7\,560 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$,

$$W = \kappa M m \left(\frac{1}{R_z} - \frac{1}{R_z + h} \right) + \frac{1}{2} m v^2 = 5,14 \cdot 10^{10} \text{ J}.$$

4.2. $E_{\text{pg}} = -6,29 \cdot 10^7 \text{ J}$. **4.3.** $v_{\text{u}} = \sqrt{\frac{2\kappa M}{R_z}} = 11\,200 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

4.4. $a = 17,96 \text{ AU}$, $v_{\text{p}} = \sqrt{\kappa M \left(\frac{2}{r_{\text{p}}} - \frac{1}{a} \right)} = 55 \cdot 10^3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$,

$$w = \frac{1}{2} v_{\text{p}} r_{\text{p}} = 2,4 \cdot 10^{15} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}, \quad S = wT = 5,75 \cdot 10^{24} \text{ m}^2.$$

4.5. $a = \frac{r_z + r_{\text{j}}}{2} = 3,1 \text{ AU}$, $t = \frac{T}{2} = 2,73 \text{ r}$, $v_{\text{p}} = 38\,600 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$,

$$v_{\text{a}} = 7\,420 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}, \quad v_z = 29\,800 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}, \quad v_{\text{j}} = 13\,100 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

5. $a = 8,07 \cdot 10^6 \text{ m}$, $b = 7,93 \cdot 10^6 \text{ m}$, $T = 7\,200 \text{ s}$.

6. $t = \frac{E - \varepsilon \sin E}{Q} = \frac{\frac{\pi}{2} - 0,99513}{7,74 \cdot 10^{-11}} \text{ s} = 7,44 \cdot 10^9 \text{ s} = 236 \text{ r}$. ($T = 2\,570 \text{ r}$.)

7.

